

基于四元素构架的车辆队列 动力学建模与分布式控制

(申请清华大学工学硕士学位论文)

培养单位：汽车工程系

学 科：机械工程

研 究 生：郑 洋

指导教师：李 克 强 教 授

二〇一五年六月

基于四元素构架的车辆队列动力学建模与分布式控制

郑洋

Dynamic Modeling and Distributed Control of Vehicular Platoon under the Four-Component Framework

Thesis Submitted to

Tsinghua University

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

by

Zheng Yang

Thesis Supervisor: Professor Li Keqiang

June, 2015

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后遵守此规定）

作者签名： _____

导师签名： _____

日 期： _____

日 期： _____

摘要

车辆队列具有减缓交通拥堵、提高驾驶安全性和改进燃油经济性的潜力。现有研究多针对一种具体队列构型设计一类分析手段，缺乏一种普遍的建模分析框架，难以分析不同信息流拓扑结构下的车辆队列。为此，本文建立了一种车辆队列的四元素建模构架，研究了线性匀质队列的闭环稳定性和鲁棒性能，提出了一种适用于非线性异质队列的分布式模型预测控制设计方法，为信息流多样化车辆队列的性能分析和控制器设计奠定了基础。

首先，基于多智能体协调控制视角，提出了一种车辆队列的四元素建模构架，并建立了各个元素的一般性数学描述。该构架将队列分解为四个基本模块：1) 节点动力学；2) 信息流拓扑结构；3) 队列几何构型；4) 分布式控制器。该模型为定量地刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能的影响提供了统一性分析框架。

其次，依托所提出的四元素构架，分析了线性匀质队列的闭环稳定性。利用矩阵因子分解将匀质队列动力学进行解耦，使得队列整体闭环稳定性等价多个小规模问题的稳定性。主要结论为：1) 利用 Routh-Hurwitz 稳定性判据，解析地建立了一类信息流拓扑结构下线性控制器参数的稳定区域。2) 利用矩阵特征根分析，指出双向跟随式队列的稳定裕度随规模增加以 $O(1/N^2)$ 速度衰减。3) 利用 Rayleigh-Ritz 定理，从信息流拓扑结构选择和非对称控制提出了两种改善稳定裕度的方法。4) 基于子系统 Riccati 方程的求解，给出了一种稳定控制器参数设计方法。

然后，基于传递函数的无穷范数分析，讨论了有限能量扰动工况下线性匀质队列的鲁棒性能。研究发现：1) 前车跟随式队列的鲁棒性能随规模呈指数增长，与线性控制器的增益选择无关。2) 若每个跟随车辆均能获取领航车辆信息，形成前车-领航者跟随式结构，则其鲁棒性能至少与规模无关。3) 双向跟随式队列的鲁棒性能随规模至少呈多项式 ($O(N^2)$) 增长。

最后，针对非线性异质队列，提出了一种分布式模型预测控制器设计方法。该控制器利用邻域车辆节点的预测轨迹信息构造子优化问题，能够适用于多种信息流拓扑结构。同时，将节点代价函数作为 Lyapunov 函数进行分析，针对单向信息流的车辆队列，给出了一种保证车辆队列渐近稳定的充分条件。

关键词：车辆队列；分布式控制；闭环稳定性；鲁棒性能；模型预测控制

Abstract

Vehicular platoon has potential to significantly mitigate traffic congestion, enhance road safety and improve fuel economy. Many existing research only focus on designing tools to analyze a specific vehicular platoon with single communication topology, which lacks a general framework to handle platoons with different information flow topologies. To address aforementioned issue, this thesis proposes a four-component framework for vehicular platoon, and within such framework the closed-loop stability and robust performance are discussed for linear homogeneous platoons. Besides, this thesis further introduces a design process of distributed model predictive control (DMPC) to deal with nonlinear heterogeneous platoons. The results in this thesis can provide tools and lay foundation to address performance analysis and controller design for vehicular platoons with different information flow topologies.

Firstly, a four-component framework is proposed for vehicular platoons from the perspective of cooperative control of multi-agent system, and the unified models of each component are established under this framework. Such perspective naturally decomposes a platoon into four interrelated components, namely, 1) node dynamics, 2) information flow topology, 3) formation geometry, and 4) distributed controller. This decomposition can provide a unified framework to analyze and quantify the influence of information flow topology, vehicle dynamics and controller parameters on the platoon performance.

Secondly, the closed-loop stability is discussed for linear homogeneous platoons within the proposed four-component framework. Using matrix factorization technique, the platoon dynamics can be decomposed, and thus closed-loop stability of platoon is proved to be equivalent to that of several subsystems. The major results are as follows: 1) the stabilizing region of linear controller gains are explicitly established for different information flow topologies by using Routh–Hurwitz stability criteria; 2) through employing matrix eigenvalue analysis, the stability margin of platoons with bidirectional topology is proved to decay to zero as $O(1/N^2)$ when platoon size increases; 3) by employing tools, such as Rayleigh-Ritz theorem, this thesis shows how to improve the stability margin of a homogeneous platoon in terms of topology selection

and control adjustment from a unified viewpoint; 4) a distributed controller synthesis approach is proposed by converting the platoon control design into solutions to parametric algebraic Riccati equations.

Thirdly, the robust performance is addressed for linear homogeneous platoons under external disturbance with finite energy by analyzing the infinite norm of corresponding transfer functions. The main results are as follows: 1) the robust performance index grows exponentially with increasing platoon size for predecessor-following topology, which is independent with the controller gains; 2) the robust performance index will at least be independent with platoon size, if every following vehicle can obtain the leader's information, resulting the predecessor-leader following topology; 3) the robust performance index at least grows as a polynomial function ($O(N^2)$) of platoon size for bidirectional topology.

Finally, a design process of distributed model predictive control (DMPC) is introduced to deal with the nonlinear heterogeneous platoons. The proposed DMPC utilizes the predicted trajectories of neighboring vehicles to construct the sub-optimization problems, which is well-suited for various information flow topologies. By using the cost function as a Lyapunov candidate, a sufficient condition is proposed to guarantee the asymptotical stability for vehicular platoons with unidirectional information flow topology.

Key words: Vehicular platoon; Distributed control; Closed-loop stability; Robust performance; Model predictive control

目 录

第 1 章 引 言	1
1.1 研究背景及意义	1
1.1.1 车辆队列系统概述.....	1
1.1.2 多智能体系统介绍.....	3
1.2 车辆队列的研究动态	4
1.2.1 车辆节点动力学.....	6
1.2.2 信息流拓扑结构.....	7
1.2.3 队列的几何构型.....	9
1.2.4 分布式控制器.....	9
1.2.5 队列的性能分析.....	10
1.3 本文研究内容	12
第 2 章 车辆队列的四元素模型构建	14
2.1 四元素模型的构架概述	14
2.2 四元素模型的数学建模	15
2.2.1 节点动力学建模.....	15
2.2.2 信息流拓扑结构描述.....	17
2.2.3 队列几何构型建模.....	22
2.2.4 分布式控制器设计.....	23
2.3 四元素模型的典型应用	24
2.3.1 时延一致线性队列建模.....	24
2.3.2 匀质线性队列系统建模.....	25
2.3.3 匀质队列的非对称控制.....	26
2.4 本章小结	27
第 3 章 线性匀质队列的闭环稳定性理论	29
3.1 控制器增益的稳定区域分析	29
3.1.1 线性匀质队列的闭环动力学方程	29
3.1.2 正实信息流拓扑结构分析.....	30
3.1.3 控制器增益稳定性区域.....	32
3.2 双向拓扑结构下稳定裕度分析	34

3.3 稳定裕度的两种改善方法	39
3.3.1 信息流拓扑结构选取.....	39
3.3.2 非对称控制器设计.....	43
3.4 基于 Riccati 方程的稳定控制器设计.....	47
3.4.1 时延为零时线性控制器增益设计	47
3.4.2 时延一致时线性控制器增益设计	49
3.5 数值仿真分析	52
3.5.1 控制器参数稳定区域仿真.....	52
3.5.2 双向拓扑下稳定裕度仿真.....	54
3.5.3 稳定裕度的改进方法仿真.....	56
3.5.4 稳定性控制器设计的仿真.....	61
3.6 本章小结	63
第 4 章 线性匀质队列的鲁棒性能分析	65
4.1 扰动工况的队列动力学建模	65
4.1.1 队列动力学的时域模型构建.....	65
4.1.2 队列动力学的频域模型构建.....	66
4.1.3 鲁棒性能指标定义.....	67
4.2 单向级联拓扑结构下队列的鲁棒性能分析	68
4.2.1 前车跟随式结构.....	68
4.2.2 领航者-前车跟随式结构.....	72
4.3 双向拓扑结构下队列的鲁棒性能分析	75
4.4 数值仿真分析	77
4.4.1 单向级联结构的仿真.....	78
4.4.2 双向拓扑结构的仿真.....	80
4.5 本章小结	83
第 5 章 车辆队列的预测控制器设计	84
5.1 非线性车辆队列的建模	84
5.2 分布式模型预测控制器设计	85
5.2.1 分布式模型预测控制概述.....	85
5.2.2 单节点优化问题设计.....	86
5.2.3 控制器算法流程.....	88
5.3 车辆队列的渐近稳定性分析	89

5.3.1 终端约束分析.....	89
5.3.2 单个节点代价函数分析.....	91
5.3.3 全部节点代价函数分析.....	94
5.3.4 渐近稳定性定理.....	96
5.4 数值仿真分析	96
5.4.1 数值仿真参数设置.....	96
5.4.2 工况 1: 初始扰动仿真	98
5.4.3 工况 2: 前车加速仿真	100
5.5 本章小结	102
第 6 章 结论与展望	103
6.1 研究结论	103
6.2 未来研究展望	104
参考文献	105
致 谢	114
声 明	115
附录 A 矩阵理论相关结论.....	116
附录 B 控制理论相关结论.....	124
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	128

第1章 引言

1.1 研究背景及意义

1.1.1 车辆队列系统概述

安全、节能、环保是汽车工业发展的永恒主题。近二十年来，汽车工业的蓬勃发展给人类的交通带来了巨大便利，但车辆保有量的迅速上升也带来了交通堵塞、道路事故、环境污染等问题^[1]。相较于拓宽或增设道路等基础设施的手段，提高车辆本身的技术、改善交通设施的使用效率等方法则能更为经济、有效地应对上述问题^{[2]-[3]}。

目前，已有不少研究基于车辆个体提出多种方法来提高车辆的安全性^{[4]-[6]}、改善车辆的经济性^{[7]-[9]}和减小车辆的排放污染^[10]。比如，Li 等人针对孤立的单一车辆，提出了具有媲美混合动力节能潜力的周期驾驶策略，也称为加速-滑行式策略（PnG, Pulse and Gliding）^[8]。文献^[9]进一步指出发动机油耗的 S 型非线性是 PnG 策略产生的根本原因，从而解释了该策略的节能机理。然而，道路上行驶的车辆并不是孤立的个体，而是与其他车辆耦合成一个车群系统。在车群系统中，驾驶员-车辆-道路等要素之间相互制约，构成一个复杂的广义动力学系统。仅仅针对单一车辆的控制方法，对于提高安全性、改善经济性、减小排放的程度是有限的。研究表明车辆的队列化可以显著减缓交通拥堵、改善交通效率、提高驾驶安全性和改进燃油经济性^{[11]-[19]}。

车辆队列化控制的研究始于上世纪 80 年代美国加州的 PATH 项目^{[11]-[13]}。“队列化”是将单一车道内的相邻车辆进行编队，根据相邻车辆信息自动调整该车辆的纵向运动状态，最终达到一致的行驶速度和期望的构型^{[11][14]}。在 PATH 项目中，队列的很多基础问题都得到了研究，比如：队列的主要目标、控制任务的分配、控制架构的布局、传感和执行技术等^{[11][13][20][21]}。之后，车辆队列化技术得到了相关研究人员更多的关注。队列控制中的很多主题都得到了讨论，比如：跟车距离的选择^{[14][22][23]}、动力系统的特性^[24]、异质性问题^{[25][26]}等。此外，更为先进复杂的控制策略也应用到了车辆队列当中，以实现更好的队列性能。例如：Liang 和 Peng（1999）为上位控制器设计了一种最优控制策略，实现了队列稳定性^[27]；Stankovic 等人（2000）应用包含原理（inclusion principle）将级联的队列系统分解为局部解耦的子系统，针对每个子系统设计了稳定的分布式控制器^[28]；Barooah 等人（2009）

提出了一种基于失谐（mistuning-based）的控制方法，以提高队列的稳定裕度^[29]；Desjardins 等（2011）采用机器学习技术设计分布式控制器，指出通过梯度下降算法改进控制器参数可以优化队列性能指标^[30]；Dunbar 和 Derek（2012）将预测控制技术应用到了车辆队列中，设计了分布式滚动时域预测控制器，得到了一种保证稳定性的充分条件^[31]；Ploeg 等人（2014）提出了一种 \mathcal{H}_∞ 控制器设计综合方法，该方法中可以显式地保证队列稳定性^[32]。如今，不少实验室和机构也开展了一些实车实验项目来展示和验证车辆队列系统的性能，比如美国加州早期的 PATH 项目^[13]，欧洲的 SARTRE 项目^[33]，日本的 Energy ITS 项目^[34]，以及 2011 年在荷兰组织的 GCDC 项目^[35]。图 1-1 展示了这些项目中进行队列系统实验时的一些场景。



图 1-1 车辆队列的道路试验

已有车辆队列研究中，所涉及的信息流拓扑结构较为单一，仅仅聚焦于少量常见的结构^{[36][37]}，比如：前车跟随式（predecessor-following topology）、前车-领航者跟随式（predecessor-leader following topology）、双向跟随式（bidirectional topology）等。随着通信技术的发展，车与车之间（Vehicle-to-Vehicle, V2V）通信普及迅速^{[38][39]}；车辆队列中可以产生大量的、不同种类的信息流拓扑结构，如双前车跟随式（two-predecessor following topology）和多前车跟随式（multiple-predecessor

following topology) 等^{[36][37][40]}。通信能力的提升导致信息流拓扑结构多样化, 此时对于车辆队列如何进行动力学建模、控制器设计以及性能分析已成为当前队列中一个亟待解决的问题。

1.1.2 多智能体系统介绍

从控制角度, 队列可视为由多个单一车辆节点, 通过节点间的信息交互对车辆个体进行控制, 进而相互耦合组成的一种动态系统。从而, 车辆队列可视为一种特殊的多智能体系统。在控制领域中, 多智能体系统是由多个具有独立自主能力的智能体, 通过一定的信息拓扑结构相互作用而形成的一种动态系统^{[41][42]}; 用于研究自然界中的群体性协同行为: 单一个体基于邻域信息做出决策, 却能导致整体行为的同步和一致 (synchronization and consensus)。

Reynold 等 (1987) 按照自然界中鸟群的特点建立了一个动物群的分布式行为 Boid 模型, 并给出了个体基于邻域信息反馈的三个规则: 1) 避撞; 2) 速度匹配; 3) 中心聚结^[43]。Vicsek 等 (1997) 指出在多个自治个体组成的离散系统中, 单一个体基于其邻域个体的信息反馈, 一定条件下所有个体的运行方向可达到一致^[44]。Jadbabaie 等 (2003) 利用代数图论和稳定性理论, 给出了无向通信拓扑下多质点系统实现速度方向一致的条件^[45]。Olfati-Saber 等 (2004) 针对由一阶积分器组成的多智能体系统, 提出一个统一研究框架, 得到了定常通信拓扑、切换通信拓扑、通信时滞等情况下系统达到一致的条件^[46]。进一步, Ren 等 (2005) 推广了文献[46]的结论, 指出在有向切换通信拓扑情况下, 由一阶积分器组成的多智能体系统实现一致性的充要条件为: 通信拓扑中具有联合的有向生成树^[47]。Li 等 (2010) 指出可以采用一种统一框架来分析多智能体系统一致性问题 and 复杂网络同步问题, 并提出一致性区域 (consensus region) 的概念^[48]。目前, 关于多智能体系统的研究已经拓宽到很多其他的方面, 比如: 高阶系统的一致性^[49], 系统的异质性^[50], 通信时延的影响^[51], 通信数据比特率的要求^[52], 以及基于多智能体的分布式优化^{[53][54]}等。

与传统针对单个系统的控制相比, 多智能体系统的协调控制有如下的特点^[55]: 1) 多个控制对象, 系统由多个相对独立的智能体通过信息流交互耦合而成; 2) 分布式控制, 单个智能体具有一定通信和计算能力的限制, 不可能也没有必要设计集中式控制器; 3) 一致性控制目标, 系统的基本目标是使得任意两个智能体之间的相对状态差趋于零, 实现期望构型和整体运动方式。本质上, 多智能体系统研究的是信息流结构和动力学控制之间的交互作用 (interplay between information networks and control theory) ^[46]。在多智能体系统研究中, 个体之间信息交互的信

息流拓扑结构，可以被抽象为图结构，单个智能体的动力学状态可建模为线性时不变系统或者非线性系统；然后，采用代数图论、矩阵分析、控制理论等技术对其进行分析和设计^[46]。对多智能体系统的更详细介绍，参见 Ren 等^[56]，Mesbahi 等^[57]，以及 Lewis 等^[58]。

一个车辆队列实际上是一种特殊的一维多智能体系统，或者是特殊的一维网络动态系统（one dimensional network of dynamical systems）。其中，单个车辆只使用邻域内车辆的信息做出控制决策，需要达到系统整体协调性目标。从而，基于多智能体系统的视角，对队列中信息流拓扑结构的多样性进行研究，能够取得一些有意义的结果。同时，这对加深队列的理解、提高队列的性能，均具有重要的理论价值和工程意义。

1.2 车辆队列的研究动态

一般观点认为，车辆队列是同一车道中，一系列自动驾驶车辆直接组群而成的系统。与之不同，本文采用多智能体系统的视角，将车辆队列控制视为一种多智能体协调控制。

近年来，已经有一些学者尝试将车辆队列视为一种多智能体系统（或网络动态系统）进行研究。例如：Oncu 等（2014）从网络控制的观点分析了通信时延和采样保持过程对队列稳定性的影响^[59]；Bernardo 等（2014）提出一种从动态网络一致性的角度分析车辆队列的方法，并且给出了具有时延情况下系统稳定的条件^[60]；Wang 等（2014）提出了一种带约束权重的一致性框架，分析了时变时延对车辆队列动力学的影响^[61]；Zheng 等（2014）基于代数图论、反馈线性化、矩阵分析，提出一种分析不同通信结构对闭环稳定性影响的方法，解析地得到了不同通信拓扑结构下线性控制器的稳定参数范围^{[36][37]}。

如图 1-2 所示，本文基于多智能体系统的视角，将一个车辆队列系统直观地分解为四个基本模块：1）节点动力学（Node Dynamics）；2）信息流拓扑结构（Information Flow Toplogy）；3）队列几何构型（Formation Geometry）；和分布式控制器（Distributed Controller）。其中，节点动力学，用于描述单个车辆的动力学行为；信息流拓扑结构，用于描述节点间信息传递的拓扑关系；队列几何构型，用于描述相邻两个节点之间的期望车距；分布式控制器，用于描述利用邻域信息的反馈控制律。本文将这种多智能体协调框架下的分解模型，称为队列“四元素”模型。该模型可以为定量地刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能影响提供一种可供选择的统一分析框架^{[36][37]}。依托这一框架，现有文献归类如表 1-1。本文将从节点动力学建模、信息流拓扑结构分析、队列几何构型、分

布式控制器以及车辆队列性能五个方面，对国内外的研究现状进行分析和总结。

表 1-1 队列控制的分类

节点动力学				
单积分器	二阶模型	三阶模型	单输入单出模型	非线性模型
[75]-[77] [104]-[106]	[27][29][60][61] [63]-[65][75][78]- [83][98][100][101]	[21]-[25][27][28][32][35]- [37][59][62][84][90]-[92] [94][95][97][99][102][103]	[26][85]-[88] [107][108]	[31][66][70][71] [74][89]
匀质			异质	
[21][22][27][29][32][36][37][61][63]-[65][75]-[77][79] [80][82][83][85][86][88][94][95][98]-[102][104]-[108]			[23]-[26][28][31][35][59][60][62][66][70][71] [74][78][81][84][87][89]-[91][92][97][103]	
信息流拓扑结构				
前车跟随式	前车-领航者跟随式	双向跟随式	双向-领航者跟随式	双前车跟随式
[21]-[25][27][32][35] [36][37][59][79][83] [85][88][91][94][95] [97][100][101]	[25][28][31][36][37] [66][70][74][80][84] [85][90][102][103]	[26][29][36][37][62]- [64][71][75][79][81][82] [83][85][86][87][89][99] [107][108]	[26][36] [37][92] [99]	[32][36][37] [94]
双前车-领航者跟随式	无向拓扑结构	有限通信距离	一般拓扑结构	
[36][37]	[36][37][78][98][99]	[65][87]	[36][37][60][61][63][64][76] [77][104]-[106]	
队列几何构型				
恒定距离		恒定时距		非线性型
[21][23][25][26][28][29][31][36][37][61]-[66][70] [71][74]-[87][90][92][94][98][100]-[108]		[23][24][27][32][35][59] [60][79][87]-[89][91][97]		[22][95]
分布式控制器				
线性控制	最优控制	\mathcal{H}_∞ 控制	滑模控制	模型预测控制
[21][23][25][26][29][36][37][59]-[65] [74][76][78]-[83][85]-[89][91][92] [94][95][98][100]-[102][104]-[108]	[27][28][75] [77]	[32][84] [90][103]	[22][24][66] [70][71]	[31][35][97]
性能指标				
队列稳定性		稳定裕度	内聚性能	
[21]-[28][31][32][35][59][62][66][70][71][74] [78]-[81][84]-[92][94][95][97][98][100]-[103]		[29][36][37][60][61][63] [64][82][83][107][108]	[65][75][76][77] [104]-[106]	

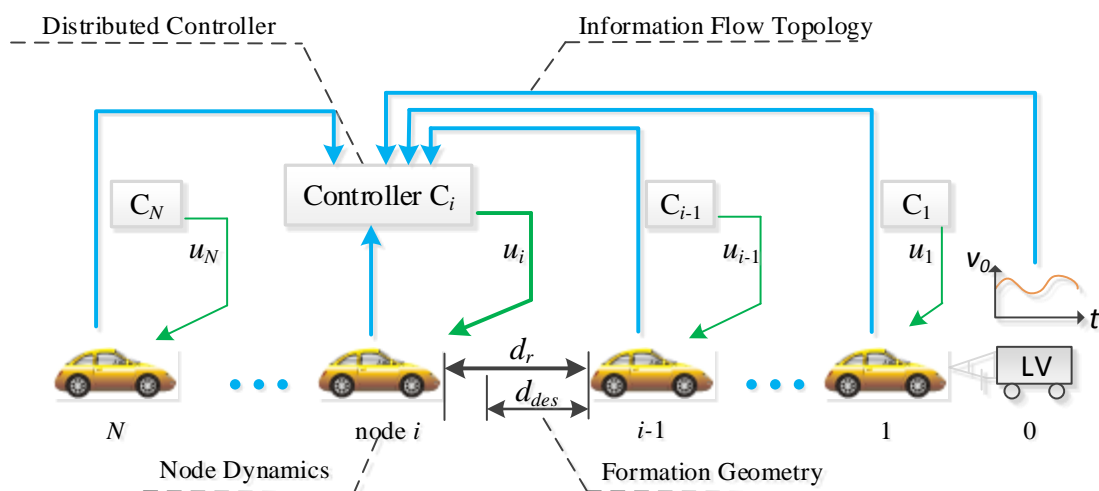


图 1-2 队列的多智能体协调框架，称之为队列的“四元素模型”

为方便表述，首先给出常见队列性能的定义。

定义 1-1: 闭环稳定性 (closed-loop stability); 具有线性时不变动力学特征的队列闭环稳定的充要条件为闭环系统的特征根均为负实部^{[58][62]}。

定义 1-2: 队列稳定性 (string stability); 一个车辆队列是队列稳定的，当且仅当队列中的扰动沿队列传播过程中不被放大^{[14][23][24]}。

定义 1-3: 稳定裕度 (stability margin); 一个车辆队列的稳定裕度指，稳定闭环特征根与虚轴距离的最小值，用于刻画初始扰动的衰减速度^{[63][64]}。

定义 1-4: 内聚性能 (coherence behavior); 一个车辆队列的内聚性能由闭环系统相应传递函数的 \mathcal{H}_2 范数进行表征，用于刻画队列在随机扰动下的鲁棒性能^[65]。

另外，上述定义方式只是描述性质；严格数学定义在不同文献中略有差别，具体请参考相应文献。

1.2.1 车辆节点动力学

多数队列研究只关注车辆纵向动力学行为特性，只有少数学者同时讨论了车辆的纵向和横向集成控制^{[66][67]}。横向动力学特性通常采用自行车模型描述，详见^{[66][67]}。本文只针对纵向动力学建模方法进行综述。

在车辆节点中，存在发动机、变速器、风阻二次项和制动系等强非线性环节。所以本质上而言，车辆的纵向动力学是强非线性的^{[20][24][68][69]}。一些研究直接采用非线性模型对车辆节点动力学进行建模，比如文献^{[31][70][71]}。施继忠等考虑随机因素建立了随机车辆纵向动力学模型，讨论了非线性随机车辆队列系统的稳定性^{[72][73]}。Yue 等把车辆纵向动力学模型分解为线性部分和非线性部分，将非线性

项视为干扰,采用神经网络的方法对非线性项进行估计,设计了稳定的控制器^[74]。非线性模型与实际车辆节点动力学比较相符。然而,采用非线性模型,难以解析地分析特定队列构型下的性能变化及其性能极限。实际上,为了方便理论分析,很多研究是采用线性模型对车辆节点纵向动力学进行描述,包括:(1)单积分器模型;(2)双积分器模型;(3)三阶模型;(4)单输入单输出模型。

单积分器模型是用于描述车辆纵向动力学的一种最简单的模型。该模型把车速作为控制输入,位移作为车辆动力学中唯一的状态。这种做法可以极大地简化控制器设计的理论分析难度。例如,在该模型假设下,队列系统的结构最优控制器设计问题可以转化为一个凸优化问题,从而能够得到高效求解;而对于其他模型,处理这个问题则较为困难^{[75][76][77]}。然而,由于偏离实际车辆纵向动力学较大,单积分器模型并不能用于分析队列不稳定的行为(string instability)^[78]。一种改进的模型是将车辆假设为一个质量块,从而得到双积分器模型描述^{[27][29][78]};或者把一个队列视为为质量-弹簧-阻尼系统,从而得到线性二阶模型描述^{[79][80][81]};上述模型都采用加速度作为车辆的控制输入。目前,许多重要理论结果都依赖于二阶模型的假设,例如:分布式最优控制器设计^[75],稳定裕度趋势分析^{[29][82][83]},以及内聚性能分析^[65]等。这个假设依然难以刻画车辆纵向动力学中的一些特征,比如动力系统惯性时滞等^{[24][28][32][35]}。对车辆纵向动力学建模的一个趋势,是进一步增加一个状态形成三阶状态空间模型,以近似车辆节点中动力系统的动态行为特征。在该模型中,控制输入已等价地转化为发动机扭矩或制动扭矩的控制^{[24][32][35][84]}。这个模型中的近似方法大部分采用反馈线性化技术^{[21][24][28][36]},或者下位控制器技术^{[12][66]}。最后一类模型是单输入单输出模型,该模型常用于从频域角度分析队列稳定性的研究中。关于这个模型,一个先驱性研究源于 PATH 项目中 Sailer, Pant 和 Hedrick 的工作^[85]。之后,这种模型也广泛地被其它的研究所采用,例如文献^{[25][26][86]-[88]}。

队列中车辆纵向动力学模型的一个重要表征是匀质性(homogeneity)属性。如果队列中所有节点均具有相同的动力学特性,则该队列被称为“匀质”(homogeneous);否则,该队列被称为“异质”(heterogeneous)。匀质性假设可以简化队列控制理论上分析难度,例如文献^{[29][32][36][37][63]};而“异质性”假设则更符合实际队列的特性,例如文献^{[23]-[26][31][87]}。

1.2.2 信息流拓扑结构

信息流拓扑结构描述了可以用于节点局部控制器设计的信息,对队列的整体行为有重要影响,比如:队列的内稳定性^{[36][37]},队列稳定性^[85],稳定裕度^{[63][64]}

和内聚性能^{[65][75]}等。

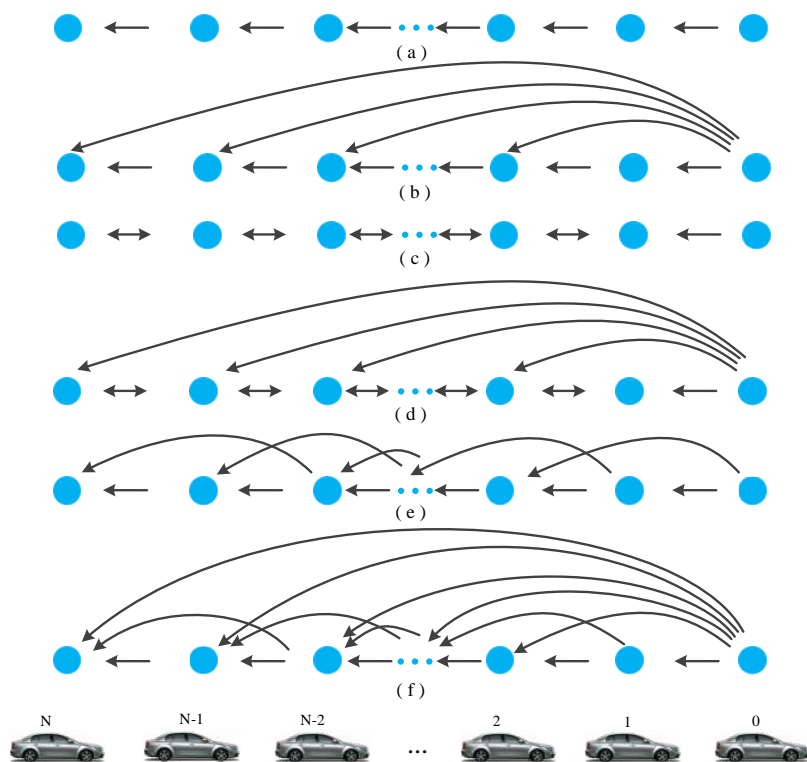


图 1-3 车辆队列中常见的信息流拓扑结构：(a) 前车跟随式，(b) 前车-领航者跟随式，(c) 双向跟随式，(d) 双向-领航者跟随式，(e) 双前车跟随式，(f) 双前车-领航者跟随式

在一个队列中，信息流拓扑结构与车辆获取周围车辆信息的方式有密切的关系。早期车辆队列主要是基于雷达进行信息获取，这意味着队列中单个车辆只能获取与其最为相邻两辆车的信息，即其前车与后车^{[37][40][89]}。在这种信息获取框架下，常见信息流拓扑结构的形式为：前后跟随式（predecessor following, PF）和双向跟随式（bidirectional, BD）。目前，随着 V2V 通信技术的迅速发展，队列中已涌现各式各样的信息流拓扑结构，包括前车-领航者跟随式（predecessor-leader following, PLF），双前车跟随式（two-predecessor following, TPF），双前车-领航者跟随式（two predecessor-leader following, TPLF），无向拓扑式（undirected），以及有限距离通信形（limited range）等。图 1-3 展示了典型的几种信息流拓扑结构。该分类方法是基于车辆节点之间的连接拓扑构型，而没有考虑通信本身的特性，比如量化误差、丢包、时延等。

不管采用哪种信息流拓扑结构，一个队列必须首先保证闭环稳定性。保证闭环稳定性主要包括两类：全局性方法和局部性方法。全局性方法直接将队列视为一个带结构的动态系统，然后进行控制器设计。例如，Guo 等针对队列系统全局动态方程，采用线性矩阵不等式方法，得到了队列闭环稳定性的条件^{[84][90]}。然而，

这种方法主要缺陷在于，其计算效率随着队列规模增大而会急剧恶化，即难以处理大规模队列的设计问题。因此，很多研究采用不同的方法将队列分解为多个子系统，针对子系统设计局部控制器以实现整体的性能要求，这便是局部性方法的思想。例如，PF 或 PFL 结构下，一个队列可视为一种单向级联系统；只需保证任意相邻两辆车的运动稳定性，即可保证队列系统整体的闭环稳定性^{[22][23][24][27][32][91]}。此外，Stankovic 等提出了一种采用包含原理 (inclusion principle) 将这类队列分解为多个分离子系统的方法，然后针对单个子系统设计了稳定控制器^[28]。上述分解策略并不适合 BD 结构下的队列，因为在这种队列中，跟驰误差可以同时向后和向前双向传递。针对这类队列，偏微分方程技术 (partial differential Equation, PDE) 常用来近似队列动力学方程；从而将稳定性分析转化为相应 PDE 的特征方程特征根的分析，避免了分析高维动力学方程的困难^{[29][82][63][62][92]}。对于一般信息流拓扑结构下的匀质队列，矩阵相似变换以及因子分解是一种重要的分析手段，这个方法可以将闭环稳定性分解为：1) 给定拓扑结构下信息流的稳定性，2) 给定控制器下单个车辆动力学的稳定性^{[36][37][93]}。

1.2.3 队列的几何构型

队列的控制目标是保证跟随车辆与领航车辆的速度一致，同时使得相邻车辆之间保持期望的几何构型。目前，队列中主要包括三种几何构型：1) 恒定距离型 (constant distance, CD)，2) 恒定时距型 (constant time headway, CTH)，3) 非线性距离型 (nonlinear distance, NLD)^{[14][94]}。对于 CD 构型，相邻两辆车的期望距离与自车车速无关，可实现较高的交通流密度；对于 CTH 构型，相邻两车的期望距离与自车速度呈线性关系，在一定程度上符合驾驶员的特性，但限制了可实现的交通流密度；对于 NLD 构型，相邻两辆车之间的期望距离是车速的非线性函数，相比于 CD 和 CTH 构型，这种方式具有同时改善交通流稳定性和提高交通流密度的潜能^{[22][95]}。

1.2.4 分布式控制器

分布式控制器利用邻域车辆的信息做出反馈控制，以实现队列全局的协调目标。无结构控制器要求队列中任意车辆节点之间均具有通信能力，即信息流拓扑结构对应着一个完全图。目前，多数研究均显式地或者隐式地针对带结构的分布式控制器进行分析和设计，例如^{[14][21][23][24][29][28][31][32]}。由于信息流拓扑结构带来的结构特性，不仅导致了控制器设计上的困难^[75]，也一定程度上决定着队列相关性能的极限^{[29][37][63][65]}。

考虑理论分析的难度以及硬件实施的方便性，常见的分布式控制器均为线性形式^{[14][20][23][28]}。在线性控制器下，队列系统的闭环稳定性依赖于信息流拓扑结构的形式。从而，线性控制器参数的设计通常需要具体问题具体分析(case-by-case)。例如，Zheng 等基于代数图论和矩阵分析的方法，解析得到了一类信息流拓扑结构下线性控制器的稳定参数区域^{[36][37]}。此外，不少学者提出一些数值的或者解析的优化方法来优化线性控制器增益，比如^{[27][28][75]}。同时，也有一些研究采用滑模控制(Sliding Mode Control, SMC)的方法，来设计控制器以实现队列稳定性^{[24][96]}。对于 SMC，队列的闭环稳定性和队列稳定性需要通过控制器参数调验进行实现。

上述控制器设计方法中主要有两个缺陷，即 1) 无法显式地处理队列稳定性；2) 无法处理状态或者控制的约束。最近，Ploeg 等人(2014)提出了一种 \mathcal{H}_∞ 控制器设计综合方法，该方法中将队列稳定性的要求显式地作为控制器设计的一部分进行处理^[32]。此外，模型预测控制(Model Predictive Control, MPC)技术也被引入队列系统，该技术可以预测车辆纵向动力学变化，同时也可以显式地处理执行器或状态的约束问题^{[31][35][97]}。

1.2.5 队列的性能分析

车辆队列化控制可以显著降低油耗、改善交通效率以及提高行车安全性。目前，绝大部分队列节能的途径均是采用“高速近距跟车”策略。该策略利用流体力学的“雁阵效应”，减小后方车辆的风阻，从而降低行驶能耗^{[16][34]}。通过优化队列中车辆节点的控制，来提高队列行驶经济性的研究尚未成熟。这一方面，Li 等提出的 PnG 策略具有较好的应用前景^{[8][9]}。另外，在自适应巡航控制系统中，已有研究提出采用模型预测控制技术，通过优化车辆节点的控制来协调跟车目标、舒适性和经济性^{[5][7]}。以下，本文将聚焦于队列系统本身控制性能，即：队列稳定性、稳定裕度以及内聚性能，总结国内外的研究动态。

(1) 队列稳定性

对于一个车辆队列，在 Lyapunov 意义下的内部稳定性并不能保证队列稳定性，误差信号沿队列传递过程中依然可能被放大，导致车辆经济性恶化，甚至发生追尾碰撞事故^{[23][24]}。

大量研究表明，队列稳定的可实现性与队列构型和信息流拓扑结构有密切关系。Swaroop 等(1999)表明采用恒定车距为控制目标时，PF 拓扑结构下的队列采用匀质线性控制器时难以保证队列稳定性^[94]。Seiler 等(2004)进一步指出由于互补敏感性积分约束，对于这种类型队列系统，其队列不稳定性与匀质控制器的

设计无关，这是 PF 拓扑结构的本质问题^[85]。Barooah 等（2005）指出对于以恒定车距的控制目标、BD 拓扑结构下的队列，匀质线性控制器同样难以保证队列稳定性^[86]。Sai 等（2005）研究表明跟随车辆获取领航者信息的能力，对于保证恒定车距型队列系统的队列稳定性至关重要^[98]。同时，Zheng 等（2014）指出这种能力对于改善队列其它方面的性能，如闭环稳定性和稳定裕度，同样非常重要^{[36][37][99]}。Middleton 等（2010）拓展了文献[85]的工作，考虑了异质车辆动力学，有限通信距离，以及非零时距构型的队列系统；指出前向通信拓扑和小时距都不能解决队列不稳定的问题^[87]。

目前，改善队列稳定性的方案主要有如下三类：

1) 松弛队列构型，即在期望跟车距离中引入足够大的时距，或者采用非线性期望跟车距离。例如，Klinge 等（2009）指出 PF 结构下的匀质队列，若采用足够大的跟车时距，系统能够实现队列稳定性^[88]。Naus 等（2010）考虑异质车辆队列系统，从频域角度推导出保证队列稳定性的充分必要条件，指出恒定时距的队列构型可以实现队列稳定^[23]。Xiao 等（2011）采用三阶状态空间模型，考虑异质队列动力学以及通信时延，指出了保证队列稳定时，跟车时距与动力系统时延和通信时延之间的关系^[24]。Zhou 等（2005）通过优化队列稳定性以及交通流的稳定性，提出了一种非线性距离的队列构型，且仿真表明该方法可以保证稳定性，同时达到了更高的交通流密度^[22]。类似想法在 Santhanakrishnan 等的研究中也得到了实现和验证^[95]。

2) 异质控制器架构，即不同车辆节点中控制器采用不一致的控制增益。例如：Khatir 等（2004）指出针对恒定距离型队列构型，PF 结构下的队列若采用非匀质控制器增益，同样可以保证队列稳定性^{[100][101]}。这种控制器设计的代价是，其控制增益随着队列长度的增加至少线性增长。从而，这种用增益换取交通流密度的做法容易导致执行器的饱和，难以实际应用。

3) 扩展信息流拓扑结构，如广播领航者信息形成 PLF 拓扑结构等。Swaroop 等（1999）表明 PLF 拓扑结构下的车辆队列是能够保证队列稳定性的。早期 PATH 项目实车实验展示时均是采用这一类设计方法^{[12][66]}。在这种结构中，所有跟随车辆均需要获取领航者的状态信息。队列长度较大时，不可避免会产生时延、丢包等通信现象。Liu 等（2001）采用部分分式展开法（partail fraction expansion approach），得到了保证队列稳定性时，领航者信息时延的上界^[96]。Seiler 等（2005）使用马尔科夫参数跳跃模型（markovian jumping parameter）来刻画队列中通信丢包现象，提出了一种存在队列稳定控制器的线性矩阵不等式条件^{[102][103]}。Peters 等（2014）指出领航者状态存在一定的时延时，PLF 拓扑结构下的车辆队列系统依然有可能

实现队列稳定。

近年来,已有多种类型的控制器能够保证队列稳定性,例如:滑模控制器^{[22][24]},模型预测控制器^{[31][35]},以及 \mathcal{H}_∞ 控制器^{[32][84][90]}等。需要注意的是,上述的控制器设计中要么采用了恒定时距的队列构型,要么利用了一定的领航者信息。

(2) 稳定裕度

稳定裕度常用于刻画队列中初始扰动的衰减速度^{[63][64]}。目前大部分针对稳定裕度的研究均聚焦于恒定距离的队列构型,这些研究表明稳定裕度是下述因素的函数,即队列规模、节点动力学模型、信息流拓扑结构、以及控制器架构^{[29][82]-[83][99]}。

将车辆动力学近似为质量块,Barooah等(2009)指出在对称控制(symmetric control)下,队列的稳定裕度以 $O(1/N^2)$ 的速度趋向于零;同时证明了若引入少量的非对称性,稳定裕度的衰减趋势可以减缓为 $O(1/N)$ ^[29]。Zheng等(2015)将上述结果推广到了三阶动力学模型下的车辆队列中^[37]。采用偏微分方程近似法,Hao等(2011)指出在D维信息流拓扑结构下,其稳定裕度可以进一步改善为 $O(1/N^{2/D})$ ^[63]。进一步,若采用非对称性控制(asymmetric control),队列的稳定裕度可以被设计为有界,且与队列规模无关^[64]。最近,Zheng等(2015)采用代数图论和特征值分析方法,提出从信息流拓扑结构选择以及控制器参数调整两个角度来改善稳定裕度的方法^[99]。

(3) 内聚性能

内聚性能是最近提出的一类控制性能,采用闭环系统相应传递函数的 \mathcal{H}_2 范数,来刻画队列在随机扰动下的鲁棒性能^{[65][104]}。Bamieh等(2012)研究了内聚性能随队列规模的变化趋势,指出信息流拓扑结构比控制器参数对内聚性能更具影响^[65]。Lin等(2013)提出一种基于同伦的牛顿算法(homotopy-based Newton's method),迭代地优化BD结构下车辆队列的内聚性能指标,以得到最优的线性控制器增益^[75]。最近,一些学者采用增广拉格朗日算法(augmented lagrangian method)和交错乘子方向法(alternating direction method of multipliers, ADMM),将内聚性能作为代价函数,以同时优化信息流拓扑结构和控制器增益^{[104][105][106]}。

1.3 本文研究内容

总结上文阐述,已有队列研究多局限于如下三种信息流拓扑结构:前后跟随式、前车-领航者跟随式和双向跟随式。对于这三种结构,不管是队列稳定性、鲁棒性能、控制器设计,目前研究已经得到了很丰富的结果。然而,已有研究通常

针对上述三种拓扑结构单独建模，缺乏统一性的分析框架。随着 V2V 通信技术的迅速发展，车辆队列中已涌现多样化的信息流拓扑结构。此时，车辆之间动力学影响并不局限于其前车与后车，从而传统基于相邻两车动力学的分析方法难以适用，且将队列作为整体的分析方法也难以适用于大规模的车辆队列。面对多样化的信息流拓扑结构，如何对车辆队列进行动力学建模、性能分析、以及控制器设计是当前队列研究中尚未深入探讨的问题。

本文从多智能体系统视角出发，以车辆动力学、代数图论和控制理论为基础，对车辆队列的动力学建模和分布式控制进行研究。本文具体工作如下：

(1) 车辆队列的四元素模型构建

车辆队列控制可视为是特殊的一维多智能体协调控制，本文基于多智能体协调控制框架，将车辆队列分解为四个基本模块：1) 节点动力学；2) 信息流拓扑结构；3) 队列几何构型；4) 分布式控制器。本文将这种分解模型称为队列四元素模型。利用模块化建模方法，本文拟建立各个元素的一般性数学描述，研究节点动力学状态解耦问题，探讨刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能影响的统一分析框架，为稳定性分析和控制器设计奠定基础。

(2) 线性匀质队列的闭环稳定性研究

车辆队列中存在多样化的信息流拓扑结构。基于线性匀质假设，本文利用矩阵因子分解将匀质队列动力学进行解耦，使得队列整体闭环稳定性等价多个小规模问题的稳定性。在此基础上，拟利用 Routh-Hurwitz 稳定性判据、矩阵特征根分析、子系统的 Riccati 方程求解，重点研究不同信息流拓扑结构下队列线性控制器参数的稳定区域，探讨线性匀质队列的稳定性能随规模的变化趋势，为信息流拓扑结构选择和分布式控制器参数设计提供参考。

(3) 线性匀质队列的鲁棒性能分析

车辆队列系统中不可避免地会出现扰动和噪声。为此，本文建立一般信息流拓扑结构下队列动力学频域模型，重点探讨单向级联拓扑结构和双向拓扑结构下匀质队列的鲁棒性能指标，为深入理解信息流拓扑结构和控制器参数对队列鲁棒性能的影响奠定基础。

(4) 非线性异质队列的预测控制器设计

队列中车辆节点动力学本质上是异质且非线性。针对这一问题，本文研究车辆队列的分布式模型预测控制器设计方法，以保证非线性异质队列的渐近稳定性。该控制器利用邻域车辆节点的预测轨迹信息构造子优化问题，能够适用于多种信息流拓扑结构。将节点代价函数作为 Lyapunov 函数，分析分布式模型预测控制器的渐近稳定性，为非线性异质队列的分布式控制提供一种可行的设计方法。

第2章 车辆队列的四元素模型构建

对于车辆队列，现有研究大多属于具体问题具体分析（case-by-case），通常是针对一种具体构型设计一类分析手段，而缺乏一种普遍的建模和分析框架。本文将队列视为一维多智能体系统，建立了一种车辆队列动力学系统的四元素建模框架，为队列的分析和控制提供一种可行的统一化视角。本章首先介绍车辆队列的四元素建模构架（four-component framework）；其次，对该构架下的各个元素建立一般性数学描述；最后，简要给出四元素模型下的三类典型应用。

2.1 四元素模型的构架概述

在一维多智能体的视角下，队列实际上是一种由多个单一车辆个体通过信息交互对节点进行控制，进而相互耦合组成的动态系统。队列中，单个车辆只使用邻域内车辆的信息给出控制决策，最终达到队列整体层面上的协调性目标。

假设队列行驶在平直的道路上，共有 $N + 1$ 个车辆，其中队首的领航车辆标号为 0，系统中的跟随车辆编号依次为 $1 \sim N$ 。队列的目标要求跟随车辆与领航车辆的速度一致，且相邻车辆之间的车距保持为期望的跟车距离。如图 2-1 所示，一个车辆队列可直观地分解为四个基本模块：1) 节点动力学；2) 信息流拓扑结构；3) 队列几何构型；4) 分布式控制器。本文把这种基于多智能体协调控制的分解模型，称为队列的“四元素模型”。其中：

- 1) 节点动力学（Node dynamic, ND），用于描述单个车辆的纵向动力学行为；
- 2) 信息流拓扑结构（Information flow Topology, IFT），用于描述车辆节点间信息传递的拓扑关系；
- 3) 队列几何构型（Formation geometry, FG），用于描述相邻两个车辆节点之间的期望车距；
- 4) 分布式控制器（Distributed controller, DC），用于描述利用邻域内车辆信息的反馈控制律。

从这一分解框架出发，车辆队列具有如下特点：

- 1) 每个车辆节点都是系统中一个智能体，车辆个体的动力学特性相对独立，但通信结构使得多个车辆耦合为一个队列整体。
- 2) 受传感器及通信范围等限制，队列中车辆的控制器均为分布式，仅能获取邻域车辆的状态信息，但系统对队列性能的要求是全局性的。

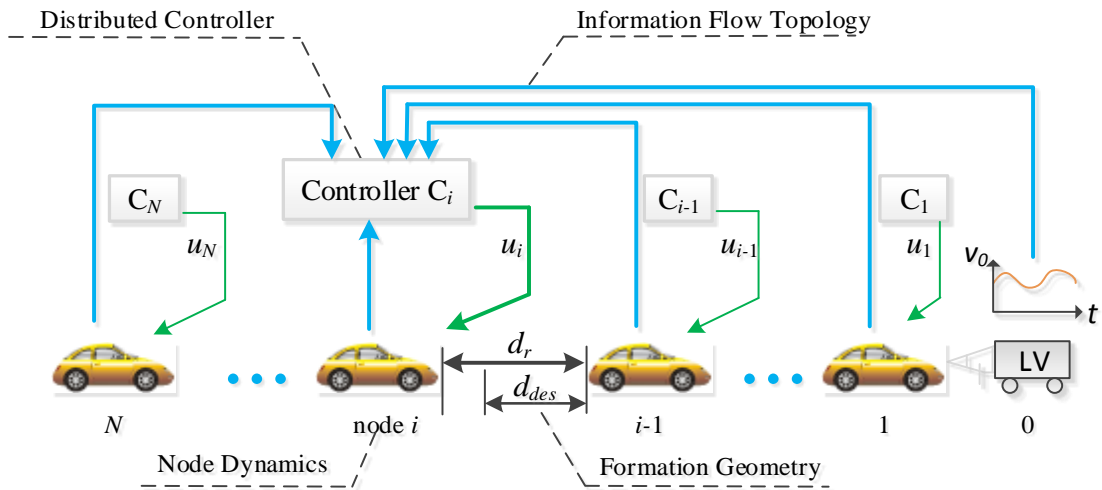


图 2-1 车辆队列系统的四元素模型

基于这一分解框架，本文已对目前国内外的队列研究进行了分类与总结（参考第 1 章），这为全局理解队列的研究现状提供了一个有益的视角。此外，该分解方法为定量地刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能影响提供一种统一的分析框架。

2.2 四元素模型的数学建模

本节介绍四元素模型中各个模块的数学描述。首先，对车辆节点的纵向动力学进行建模，包括非线性模型以及常见的反馈线性化技术；其次，将通信信息流抽象为图的结构，采用代数图论进行统一描述；然后，给出常用队列几何构型的数学表达式；最后，对线性分布式控制器进行建模。

2.2.1 节点动力学建模

车辆的纵向动力学是强非线性的，存在发动机、变速器、风阻二次项和制动系等非线性环节。兼顾建模复杂性和精确性，对车辆纵向动力学特性做如下简化：

- 1) 仅考虑车辆纵向运动，忽略横向和垂向运动；
- 2) 针对良好路面和常规驾驶条件，忽略轮胎的滑移；
- 3) 车辆视为刚体，且左右完全对称，忽略前后轴的载荷转移；
- 4) 车辆动力系统的输入与输出特性有一阶惯性环节描述。

基于以上简化，建立车辆节点的非线性纵向动力学模型^{[5][7][24][37]}，

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = v_i(t) \\ \frac{\eta_{T,i}}{r_{w,i}} T_i(t) = m_i \dot{v}_i(t) + C_{A,i} v_i^2(t) + m_i g f_i, & i \in \mathcal{N}. \\ \tau_i \dot{T}_i(t) + T_i(t) = T_{\text{des},i}(t) \end{cases} \quad (2-1)$$

其中, \mathcal{N} 表示正整数集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, $p_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 分别为车辆 i 的位移和速度, m_i 为车辆的质量, $C_{A,i}$ 为集总空气阻力系数, g 为重力加速度常数, f_i 为滚动阻力系数, $T_i(t)$ 为车辆实际的驱动力或制动力的力矩, $T_{\text{des},i}(t)$ 为期望的驱动力或制动力的力矩, τ_i 为车辆纵向动力系统的时滞常数, $r_{w,i}$ 为车轮半径, $\eta_{T,i}$ 为传动系统的机械效率。另外, 领航车辆的位移及速度分别表示为 $p_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 。

纵向动力学模型 (2-1), 是对动力系统力矩的输入输出特性进行一阶惯性环节近似后得到的描述。该模型为非线性, 能对车辆纵向动力学给出较为精确的描述。为了方便理论分析, 不少学者采用反馈线性化技术, 将上述模型线性化为三阶状态方程描述^{[24][28][37][74][84]}。针对模型 (2-1), 下面给出反馈线性化的推导过程。系统输出 $y_i(t) = p_i(t)$ 的相对阶为 3, 对输出求导得到

$$\dot{y}_i = v_i. \quad (2-2)$$

$$\ddot{y}_i = a_i. \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= \frac{1}{m_i} \left(\eta_{T,i} \frac{\dot{T}_i}{r_{w,i}} - 2C_{A,i} v_i \dot{v}_i \right) = \frac{1}{m_i} \left(\eta_{T,i} \frac{T_{\text{des},i} - T_i}{\tau_i r_{w,i}} - 2C_{A,i} v_i \dot{v}_i \right) \\ &= -\frac{1}{\tau_i} a_i + \frac{1}{\tau_i} \frac{1}{m_i} \left(\eta_{T,i} \frac{T_{\text{des},i}}{r_{w,i}} - C_{A,i} v_i (2\tau_i \dot{v}_i + v_i) - m_i g f_i \right). \end{aligned} \quad (2-4)$$

式 (2-3) 中 a_i 为车辆节点的加速度。反馈线性化策略的选择如下

$$T_{\text{des},i}(t) = \frac{1}{\eta_{T,i}} (C_{A,i} v_i (2\tau_i \dot{v}_i + v_i) + m_i g f_i + m_i u_i) r_{w,i}. \quad (2-5)$$

其中, u_i 是反馈线性化后车辆节点的控制输入。因而, 式 (2-4) 转化为

$$\tau_i \dot{a}_i(t) + a_i(t) = u_i(t). \quad (2-6)$$

进而得到车辆队列中节点的三阶状态空间模型,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \mathbf{A}_i x_i(t) + \mathbf{B}_i u_i(t), \quad i \in \mathcal{N}, \\ x_i(t) &= \begin{bmatrix} p_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_i} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中, $\mathbf{x}_i(t)$ 为节点状态。

上述反馈线性化方法, 以及所得到的三阶状态空间模型 (2-7) 在车辆队列的分析中得到广泛的应用^{[24][27][28][32][36][37]}。另外, 不少文献采用分层控制的思路, 把三阶模型 (2-7) 视为上位控制器的标准模型, 而使用下位控制器控制发动机节气门开度或制动压力, 以跟随期望的加速度^{[5][7][22][27]}。例如, Liang 等提出一种自适应控制的下位控制技术以跟随上位控制器得到的加速度^[27]; Li 等提出采用车辆逆模型的思路来控制节气门开度或制动压力^[5]。

此外, 也有学者将车辆视为质点, 采用双积分器模型来描述节点动力学, 忽略了动力系统时的时滞因素^{[29][63][64]},

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (2-8)$$

式 (2-8) 中, 控制量相当于车辆的加速度。若将队列视为一种质量-弹簧-阻尼系统^{[79]-[81]}, 则其车辆节点的动力学描述为

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) + \eta v_i(t) = u_i(t) \end{cases}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (2-9)$$

其中, η 表示阻尼系数。为了理论分析, 也有一些研究采用单积分器模型近似车辆节点的动力学^{[75][76][106]}, 即

$$\dot{p}_i(t) = u_i(t), \quad i \in \mathcal{N}. \quad (2-10)$$

此时, 控制量相当于车辆的速度。

上述非线性模型式 (2-1)、线性模型式 (2-7)、式 (2-8) - 式 (2-10) 均有应用, 但随着具体场景和要求选择不同。考虑与实际动力学特性的相符性、理论分析的简洁性, 第三、四章将三阶线性模型式 (2-7) 作为节点动力学描述, 由此得到分析结果可作为队列性能的比较基准。第五章针对非线性模型式 (2-1), 提出一种分布式模型预测控制设计方法, 以保证队列的渐近稳定性。

2.2.2 信息流拓扑结构描述

表征车辆之间信息传递的信息流拓扑结构, 可以直观地抽象为图的结构, 进而用相应矩阵及其性质进行刻画。这种技术称为代数图论, 在多智能体协调控制以及网络控制领域得到了广泛应用^{[41][46][47]}。关于代数图论全面的介绍, 参见 Godsil 等^[110]和 Brouwer 等^[111]。

如图 2-1 所示, 一个队列包括一个领航车辆以及 N 个跟随车辆。跟随车辆之间的信息传递结构用有向图 $\mathcal{G}_N = \{\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N\}$ 进行表示, 其中 $\mathcal{V}_N = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示顶

点集, $\mathcal{E}_N = \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N$ 表示边集。顶点 i 代表第 i 个跟随车辆, 其动力学特性可由 (2-1) 或 (2-7) 表征; (j, i) 代表一条从顶点 j 到顶点 i 的有向边, 表示车辆 i 能够获取车辆 j 的状态信息。为刻画从领航车辆到跟随车辆的信息流, 定义一个增广有向图 $\mathcal{G}_{N+1} = \{\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}\}$, 其中顶点集为 $\mathcal{V}_N = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, 边集为 $\mathcal{E}_{N+1} = \mathcal{V}_{N+1} \times \mathcal{V}_{N+1}$ 。由 \mathcal{G}_N 和 \mathcal{G}_{N+1} 进行表征的信息流拓扑结构的性质, 可用如下三个矩阵进行表征,

- 1) 邻接矩阵 (Adjacent matrix) \mathcal{A}_N ;
- 2) 拉普拉斯矩阵 (Laplacian matrix) \mathcal{L} ;
- 3) 牵引矩阵 (Pining matrix) \mathcal{P} 。

与 \mathcal{G}_N 对应的邻接矩阵 $\mathcal{A}_N = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 定义为

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (j, i) \in \mathcal{E}_N \\ 0, & \text{if } (j, i) \notin \mathcal{E}_N \end{cases}, \quad i, j \in \mathcal{N}, \quad (2-11)$$

其中, $a_{ij} = 1$ 表示车辆 i 能够获取车辆 j 的状态信息。本文假设图 \mathcal{G}_N 中没有自环, 即 $a_{ii} = 0, i \in \mathcal{N}$ 。节点 i 的邻域集定义为

$$\mathbb{N}_i = \{j | a_{ij} = 1\}. \quad (2-12)$$

集合 \mathbb{N}_i 表示在跟随车辆中, 节点 i 通过 V2V 通信或者雷达检测能够获取信息的车辆集。节点 i 的入度定义为 $\text{deg}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, 同时定义入度矩阵为

$$\mathcal{D}_N = \begin{bmatrix} \text{deg}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \text{deg}_N \end{bmatrix}. \quad (2-13)$$

对应于 \mathcal{G}_N 的拉普拉斯矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 定义为

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_N - \mathcal{A}_N. \quad (2-14)$$

对应于 \mathcal{G}_{N+1} 的牵引矩阵 $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 用于描述跟随车辆获取领航车辆信息的情况, 定义如下

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_N \end{bmatrix}, \quad (2-15)$$

其中, 若 $\{0, i\} \in \mathcal{E}_{N+1}$, 则 $p_i = 1$, 否则 $p_i = 0$ 。当 $p_i = 1$, 表示车辆 i 能够获取领航车辆的状态信息; 此时, 车辆 i 也称为被领航车辆直接牵引。同时, 定义车辆 i 的领航车辆可达性集合如下

$$\mathbb{P}_i = \begin{cases} \{0\}, & \text{if } p_i = 1 \\ \emptyset, & \text{if } p_i = 0 \end{cases}. \quad (2-16)$$

下面给出 \mathcal{G}_{N+1} 中两个定义，

1) 有向路径 (directed path): 一个有向边序列集 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$, 其中 $(i_{j-1}, i_j) \in \mathcal{E}_{N+1}, \forall j \in \{2, \dots, k\}$, 则该有向边序列集称为由节点 i_1 到 i_k 的一条有向路径。

2) 有向生成树 (spanning tree): 若图中部分或全部边集组成的树能够连接图中所有的节点, 则该树称为一颗有向生成树。

\mathcal{G}_{N+1} 包含有向生成树, 当且仅当边集 \mathcal{E}_{N+1} 中至少存在一个子集组成一颗有向生成树。为保证系统的能控性, 本文均假设 \mathcal{G}_{N+1} 中至少包含一颗以领航车辆为根节点的有向生成树^[47]。换言之, 从领航车辆到任一跟随车辆均存在至少一条有向路径。这说明任一跟随车辆均能直接或者间接地获取领航车辆的状态信息。不难看出, 图 1-3 中展示的信息流拓扑结构均满足有向生成树的假设。

下面以图 1-3 中展示的信息流拓扑结构为例, 给出上述定义矩阵的具体表达式。

(1) PF 与 PLF 拓扑结构

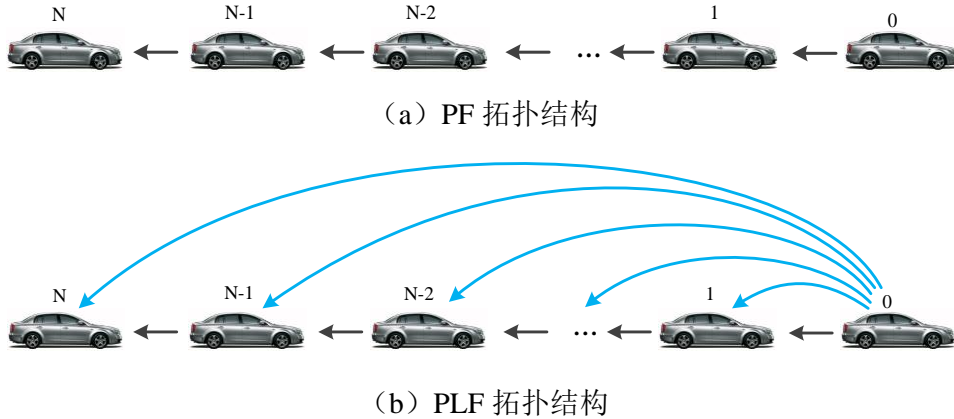


图 2-2 PF 与 PLF 拓扑结构

如图 2-2 所示, PF 拓扑结构下, 车辆只能获取其前面一辆车的状态信息; 而 PLF 拓扑结构下, 每个跟随车辆还能获取领航车辆的信息。所以, 在这两种结构下, 节点 i 的邻域集均为

$$(\mathbb{N}_i)_{\text{PF or PLF}} = \begin{cases} \emptyset, & i = 1 \\ \{i-1\}, & i = \mathcal{N} \setminus \{1\} \end{cases} \quad (2-17)$$

所以, 这两种拓扑结构的邻接矩阵与拉普拉斯矩阵亦均为

$$(\mathcal{A}_N)_{\text{PF or PLF}} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2-18)$$

$$(\mathcal{L})_{\text{PF or PLF}} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在 PF 与 PLF 拓扑结构中, 节点 i 的领航车辆可达集分别为

$$(\mathbb{P}_i)_{\text{PF}} = \begin{cases} \{0\}, & i = 1 \\ \emptyset, & i = \mathcal{N} \setminus \{1\} \end{cases}; \quad (\mathbb{P}_i)_{\text{PLF}} = \{0\}, \quad i = \mathcal{N}. \quad (2-19)$$

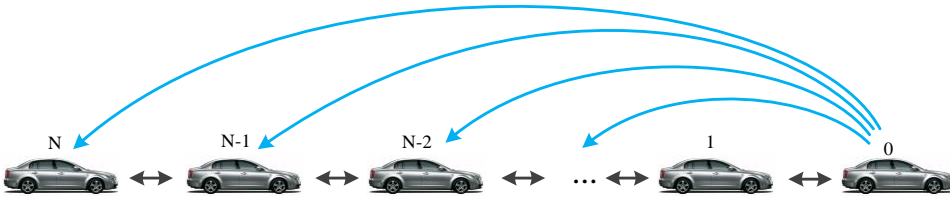
所以, 这两种拓扑结构的牵引矩阵分别表示如下

$$(\mathcal{P})_{\text{PF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{P})_{\text{PLF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-20)$$

(2) BD 与 BDL 拓扑结构



(a) BD 拓扑结构



(b) BDL 拓扑结构

图 2-3 BD 与 BDL 拓扑结构

如图 2-3 所示, BD 拓扑结构下, 车辆能获取其前车与后车的状态信息; 而 BDL 拓扑结构下, 每个跟随车辆还能获取领航车辆的信息。所以, 在这两种结构下, 节点 i 的邻域集均为

$$(\mathbb{N}_i)_{\text{BD or BDL}} = \begin{cases} \{2\}, & i = 1 \\ \{i-1, i+1\}, & i = \mathcal{N} \setminus \{1, N\}. \\ \{N-1\}, & i = N \end{cases} \quad (2-21)$$

这两种拓扑结构的邻接矩阵与拉普拉斯矩阵均为

$$(\mathcal{A}_N)_{\text{BD or BDL}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2-22)$$

$$(\mathcal{L})_{\text{BD or BDL}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

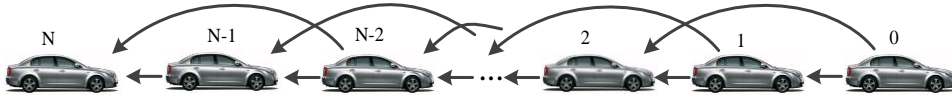
在 BD 与 BDL 拓扑结构中, 节点 i 的领航车辆可达集分别为

$$(\mathbb{P}_i)_{\text{BD}} = \begin{cases} \{0\}, & i = 1 \\ \emptyset, & i = \mathcal{N} \setminus \{1\} \end{cases}; \quad (\mathbb{P}_i)_{\text{BDL}} = \{0\}, \quad i = \mathcal{N}. \quad (2-23)$$

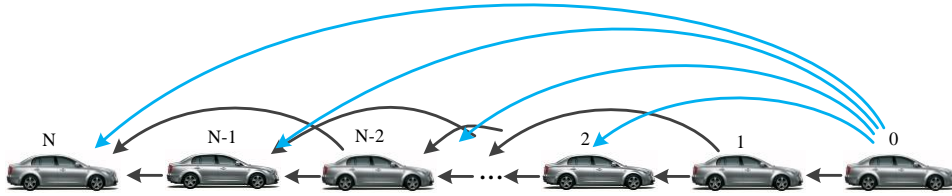
从而, 这两种拓扑结构的牵引矩阵分别为

$$(\mathcal{P})_{\text{BD}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{P})_{\text{BDL}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-24)$$

(3) TPF 与 TPLF 拓扑结构



(a) TPF 拓扑结构



(b) TPLF 拓扑结构

图 2-4 TPF 与 TPLF 拓扑结构

如图 2-4 所示, TPF 拓扑结构下, 车辆能获取其前面两辆车的状态信息; 而 TPLF 拓扑结构下, 每个跟随车辆还能获取领航车辆的信息。所以, 在这两种结构下, 节点 i 的邻域集均为

$$(\mathbb{N}_i)_{\text{TPF or TPLF}} = \begin{cases} \emptyset, & i = 1 \\ \{1\}, & i = 2 \quad \dots \\ \{i-1, i-2\}, & i = \mathcal{N} \setminus \{1, 2\} \end{cases} \quad (2-25)$$

相对应的邻接矩阵与拉普拉斯矩阵亦均为

$$(\mathcal{A}_N)_{\text{TPF or TPLF}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2-26)$$

$$(\mathcal{L})_{\text{TPF or TPLF}} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

在 TPF 与 TPLF 拓扑结构中, 节点 i 的领航车辆可达集分别为

$$(\mathbb{P}_i)_{\text{TPF}} = \begin{cases} \{0\}, & i = \{1, 2\} \\ \emptyset, & i = \mathcal{N} \setminus \{1\} \end{cases}; \quad (\mathbb{P}_i)_{\text{TPLF}} = \{0\}, \quad i = \mathcal{N}. \quad (2-27)$$

对应的牵引矩阵分别为

$$(\mathcal{P})_{\text{TPF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathcal{P})_{\text{TPLF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-28)$$

以上针对典型信息流拓扑结构给出了相应矩阵描述, 一般结构同样可以类似地刻画。从而, 图的性质便可以转化为相应矩阵的性质 (特征值、特征向量等)。注意这种描述只是基于节点之间的连接拓扑构型, 而没有考虑通信的特性, 比如量化误差、丢包、时延等。这些特性的描述, 可在控制器层面加以表征。

2.2.3 队列几何构型建模

车辆队列控制的目标是要求跟随车辆与领航车辆速度保持一致, 且相邻车辆之间的距离保持为期望车距, 即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_0(t)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|p_{i-1}(t) - p_i(t) - d_{i-1,i}\| = 0 \end{cases}, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (2-29)$$

其中, $d_{i-1,i} > 0$ 为节点 $i-1$ 与节点 i 之间的期望距离。这种期望距离定义满足如下运算

$$d_{i,i} = 0, \quad d_{i,i-1} = -d_{i-1,i}, \quad d_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} d_{k,k+1}. \quad (2-30)$$

期望距离 $d_{i-1,i}$ 的具体选择决定了队列几何构型。对于恒定距离型队列, $d_{i-1,i}$ 为一个给定的常数, 即

$$d_{i-1,i} = d_0, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (2-31)$$

其中, d_0 为给定大于零的常数。对于恒定时距型队列, $d_{i-1,i}$ 是自车车速的一个线性函数, 即

$$d_{i-1,i} = t_h v_i + d_0, \quad i \in \mathcal{N}, \quad (2-32)$$

其中, t_h 为跟车时距。对于非线性距离型队列, $d_{i-1,i}$ 是自车车速的一个非线性函数, 即

$$d_{i-1,i} = g(v_i), \quad i \in \mathcal{N}. \quad (2-33)$$

在不同文献中, $g(\cdot)$ 的形式略有不同, 但均是从保证队列稳定、交通流稳定、提高交通流密度的角度来优化函数形式。例如, Zhou 等给出非线性型为^[22]

$$g(v_i) = d_0 + T v_i + G v_i^2, \quad (2-34)$$

其中, T 和 G 为待优化的参数, 通过优化交通流密度、保证队列稳定和交通流稳定来确定。Santhanakrishnan 等没有直接指定非线性函数的具体表达, 而是直接通过函数推导来确定具体形式^[95]。

2.2.4 分布式控制器设计

节点 i 处局部控制器使用其邻域信息对该节点进行控制, 以达到队列的期望目标。其中, 车辆节点能使用的邻域信息定义为

$$\mathbb{I}_i = \mathbb{N}_i \cup \mathbb{P}_i. \quad (2-35)$$

对于鲁棒控制、滑模控制、或者模型预测控制, 均有自身的设计逻辑流程来利用其局部信息。简单起见, 本节只给出线性控制器的设计, 表示如下

$$\begin{aligned} u_i(t) = & - \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \left[k_{ij,p} (p_i(t - \gamma_{ii}) - p_j(t - \gamma_{ij}) - d_{i,j}) \right. \\ & + k_{ij,v} (v_i(t - \gamma_{ii}) - v_j(t - \gamma_{ij})) \\ & \left. + k_{ij,a} (a_i(t - \gamma_{ij}) - a_j(t - \gamma_{ij})) \right]. \end{aligned} \quad (2-36)$$

其中, $k_{ij,\#}$, ($\# = p, v, a$) 是控制器的增益, γ_{ii} 为对应获取自身状态的时延, γ_{ij} 为对应获取邻域车辆的时延。式 (2-36) 是线性控制器的一般形式, 不少研究使用式

(2-36) 特定简化的形式, 比如[29][36][37][61][63][75][80]。

2.3 四元素模型的典型应用

针对四元素模型中各个模块, 节 2.2 建立的数学模型具有一般性。针对具体队列时, 需要做一定假设简化以方便分析。本节针对车辆节点的三阶状态空间模型式 (2-7), 对时延一致队列、匀质队列、队列非对称控制几种典型工况, 给出四元素模型的应用方法。对于非线性动力学模型式 (2-1) 的应用, 将在第五章中介绍。

2.3.1 时延一致线性队列建模

假设队列中的时延一致, 即式(2-36)中 $\gamma_{ij} = \gamma, i, j \in \mathcal{N}$ 。为将控制器式(2-36)写成一个紧凑的形式, 定义一个新的跟车误差状态

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t) - \tilde{\mathbf{d}}_i, \quad (2-37)$$

其中, $\tilde{\mathbf{d}}_i = [d_{i,0}, 0, 0]^T$ 。假设队列构型为恒定距离型, 即 $d_{i,0} = -i \times d_0$ 。由于前车假设为匀速运动, 即 $x_0(t) = v_0 t$ 。所以跟车误差状态的动力学方程依然为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{B}_i u_i(t). \quad (2-38)$$

从而, 式 (2-36) 可以转化为

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \mathbf{k}_{ij}^T (\tilde{\mathbf{x}}_i(t - \gamma) - \tilde{\mathbf{x}}_j(t - \gamma)) \\ &= - \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{k}_{ij}^T (\tilde{\mathbf{x}}_i(t - \gamma) - \tilde{\mathbf{x}}_j(t - \gamma)) + p_i \mathbf{k}_{i0}^T \tilde{\mathbf{x}}_i(t - \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (2-39)$$

其中, $\mathbf{k}_{ij}^T = [k_{ij,p}, k_{ij,v}, k_{ij,a}]$ 。所以, 单个车辆的跟车误差的闭环动力学方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{B}_i \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \mathbf{k}_{ij}^T (\tilde{\mathbf{x}}_i(t - \gamma) - \tilde{\mathbf{x}}_j(t - \gamma)). \quad (2-40)$$

为了推导队列整体闭环动力学模型, 定义一个集总状态向量和集总控制向量分别为

$$\mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{x}}_1^T, \tilde{\mathbf{x}}_2^T, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N \times 1}, \quad \mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}. \quad (2-41)$$

所以有

$$\mathbf{U} = -\mathcal{K}(\mathcal{G}_{N+1}) \cdot \mathbf{X}(t - \gamma), \quad (2-42)$$

其中, $\mathcal{K}(\mathcal{G}_{N+1})$ 为对应于信息流拓扑结构 \mathcal{G}_{N+1} 的控制增益矩阵,

$$\mathcal{K}(\mathcal{G}_{N+1}) = \begin{bmatrix} p_1 \mathbf{k}_{10}^T + \sum_{j=1}^N a_{1j} \mathbf{k}_{1j}^T & -a_{12} \mathbf{k}_{12}^T & \cdots & -a_{1N} \mathbf{k}_{1N}^T \\ -a_{21} \mathbf{k}_{21}^T & p_2 \mathbf{k}_{20}^T + \sum_{j=1}^N a_{2j} \mathbf{k}_{2j}^T & \cdots & -a_{2N} \mathbf{k}_{2N}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{N1} \mathbf{k}_{N1}^T & -a_{N2} \mathbf{k}_{N2}^T & \cdots & p_N \mathbf{k}_{N0}^T + \sum_{j=1}^N a_{Nj} \mathbf{k}_{Nj}^T \end{bmatrix}.$$

则所有跟随车辆的动力学方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathcal{K}(\mathcal{G}_{N+1}) \cdot \mathbf{X}(t - \gamma), \quad (2-43)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N \times N}.$$

式 (2-43) 即为时延一致时线性队列的闭环动力学模型。在特定的结构下, 比如 PF 或 PLF, 式 (2-43) 可解解耦为多个单向级联系统的子系统, 此时系统性能分析只需要分析与单个节点规模相同的子系统即可。而对于一般的信息流拓扑结构, 该模型并不能方便的解耦, 而需要全局性的分析。

2.3.2 匀质线性队列系统建模

进一步假设队列中车辆节点匀质, 即动力学相同, $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}, \mathbf{B}_i = \mathbf{B}, i \in \mathcal{N}$ 。同时假设控制器增益均相同, 即 $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k} = [k_p, k_v, k_a]^T$ 。则控制器 (2-42) 可简化为

$$\mathbf{U} = -(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{X}(t - \gamma), \quad (2-44)$$

其中, \mathcal{L}, \mathcal{P} 分别为与信息流拓扑结构对应的拉普拉斯矩阵以及牵引矩阵, \otimes 为 Kronecker 积。则式 (2-43) 可写成

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) - \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B} \cdot (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{X}(t - \gamma) \\ &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) - (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{X}(t - \gamma). \end{aligned} \quad (2-45)$$

若假设车辆队列中不存在时延, 即 $\gamma = 0$ 。式 (2-45) 可进一步转化为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{X}(t), \quad (2-46)$$

其中,

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{L} + \mathbf{P}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T. \quad (2-47)$$

在式 (2-47) 中, \mathbf{A}_c 也称为车辆队列的整体闭环系统特征矩阵。匀质线性队列的动力学可以式 (2-45) 和式 (2-47) 进行描述, 虽然建模过程做了不少假设, 但可以在理论上得到不少有意义的结果。第三章将针对式 (2-45) 和式 (2-47) 分析队列的闭环稳定性。

2.3.3 匀质队列的非对称控制

近年来, 车辆队列的非对称控制 (asymmetric control) 得到了研究人员的关注 [29][63][64][75][99]。本节基于四元素模型框架, 建立匀质队列的非对称控制动力学模型。方便起见, 本节只考虑 BD 拓扑结构下匀质无时延队列的非对称控制。图 2-5 给出了 BD 拓扑结构下车辆队列的非对称控制的示意图。

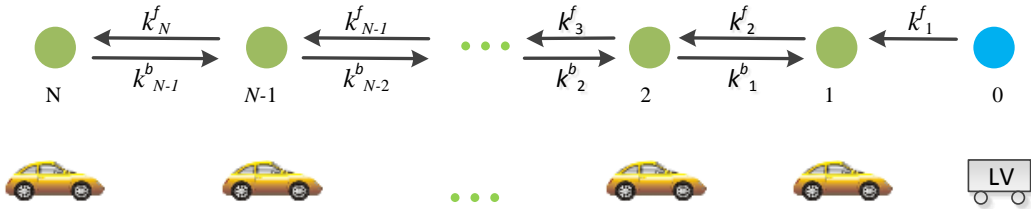


图 2-5 BD 拓扑结构下队列的非对称控制

在 BD 拓扑结构下, 式 (2-39) 的分布式控制器可以具体写为

$$\begin{cases} u_i(t) = -(\mathbf{k}_i^f)^T (\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) - (\mathbf{k}_i^b)^T (\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}), \\ u_N(t) = -(\mathbf{k}_N^f)^T (\tilde{\mathbf{x}}_N - \tilde{\mathbf{x}}_{N-1}) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2-48)$$

其中, $\mathbf{k}_i^f = [k_{i,p}^f, k_{i,v}^f, k_{i,a}^f]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 是对前车状态信息的控制增益, $\mathbf{k}_i^b = [k_{i,s}^b, k_{i,v}^b, k_{i,a}^b]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 是对后车状态信息的控制增益。

定义 2-1: 控制器式 (2-48) 称为非对称控制器, 若

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i^f = (1 + \epsilon) \mathbf{k}, \mathbf{k}_i^b = (1 - \epsilon) \mathbf{k} & i = 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{k}_N^f = (1 + \epsilon) \mathbf{k}, \end{cases} \quad (2-49)$$

其中, $\epsilon \in (0, 1)$ 为不对称度。

在定义 2-1 下, 控制器式 (2-48) 可进一步写为

$$\mathbf{U} = -(\mathbf{L}_{\text{BD}} + \mathbf{P}_{\text{BD}})_\epsilon \otimes \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{X}, \quad (2-50)$$

其中, $(\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD})_\epsilon$ 为 BD 结构下的 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 矩阵, 注意已包含非对称度 ϵ , 即

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD})_\epsilon \\
 &= - \begin{bmatrix} 2 & -1 + \epsilon & & & & \\ -1 - \epsilon & 2 & -1 + \epsilon & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 - \epsilon & 2 & -1 + \epsilon & \\ & & & -1 - \epsilon & 2 & -1 + \epsilon \\ & & & & -1 - \epsilon & 1 + \epsilon \end{bmatrix}. \quad (2-51)
 \end{aligned}$$

从而, 对于 BD 结构下的线性非对称控制的匀质队列, 其闭环动力学表达为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_{c,BD} \cdot \mathbf{X}(t), \quad (2-52)$$

其中,

$$\mathbf{A}_{c,BD} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD})_\epsilon \otimes \mathbf{B}\mathbf{k}^T. \quad (2-53)$$

评注 2-1. 由式 (2-43)、式 (2-45)、式 (2-47)、以及式 (2-53) 对不同情形下队列的刻画, 容易看出队列闭环动力学方程为四个基本模块的函数: 1) 节点动力学 ($\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$); 2) 信息流拓扑结构 (\mathcal{G}_{N+1} 及 \mathcal{L}, \mathcal{P}); 3) 队列几何构型 (d_0 , 式 (2-37)); 4) 分布式控制器 (\mathbf{k}_{ij} 及 \mathbf{k})。从而可知, 每个模块对队列性能均有影响。然而, 对于一般性队列, 难以解析地分析中不同模块对队列性能的影响。大部分现有研究聚焦于某一具体队列形式进行分析。

评注 2-2. 当规模 N 变大时, 将队列作为一个整体来分析则变得比较困难。一个可行途径是将队列等价地解耦成多个子系统, 而子系统规模与队列规模 N 无关。上述模型中, 式 (2-45)、式 (2-47) 和式 (2-53) 可以通过矩阵因子分解进行等价转化, 这部分内容参见第三章的分析。式 (2-43) 的分解则比较困难, 这个困难的本质来源于车辆动力学的异质性, 一种处理方法是采用鲁棒控制理论, 将异质性分析转化为标称模型加上模型不确定性的分析^[112]。

评注 2-3. 四元素模型同样可处理扰动工况下、或者采用非线性动力学模型的队列。关于扰动工况的队列鲁棒性分析参见第四章, 关于非线性异质队列的控制器设计参见第五章。

2.4 本章小结

本文将车辆队列视为一种特殊的一维多智能体系统。基于该视角, 本章介绍了车辆队列的四元素建模构架, 以及各个元素的典型数学描述, 同时给出了三种典型场景的应用示例。结论如下:

- (1) 四元素建模构架将队列分为四个关键组成, 即 1) 节点动力学、2) 信息

流拓扑结构、3) 队列几何构型、4) 分布式控制器。这为定量地刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能的影响，提供了一种可行的统一分析方法。

(2) 在四元素模型构架中，反馈线性化与代数图论是两种有效的技术，前者将车辆非线性模型转化为线性模型进行分析，后者统一地将信息流拓扑结构转化为矩阵进行分析。对于具体应用场景，如时延一致线性队列、匀质线性队列、非对称控制下匀质队列，均可以在四元素模型构架中统一进行建模处理。

第3章 线性匀质队列的闭环稳定性理论

队列设计的首要目标是保证闭环稳定性。基于所提出的四元素建模构架，本章采用矩阵因子分解、Routh–Hurwitz 稳定性判据等技术，分析不同信息流拓扑结构下车辆队列的闭环稳定性。首先，解析地建立一类信息流拓扑结构下，匀质队列线性控制器增益的稳定区域，并得到了双向信息流拓扑结构下，车辆队列稳定裕度随队列规模变化的关系；其次，从拓扑结构选择和非对称性控制两个角度提出改善稳定裕度的方法；然后，基于局部子系统的 Riccati 方程求解，给出一种稳定控制器参数设计方法，保证一致性时延下队列的闭环稳定性；最后，数值仿真验证了方法的正确性。

3.1 控制器增益的稳定区域分析

本节针对线性匀质队列，分析线性控制器参数的稳定区域。首先，给出匀质队列的闭环动力学方程；其次，分析一类信息流拓扑结构对应 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 矩阵的性质；最后，给出这类拓扑结构下线性控制器增益的稳定区域。

3.1.1 线性匀质队列的闭环动力学方程

根据第2章中的反馈线性化技术，车辆非线性动力学可以转化三阶状态方程。同时，假设队列中车辆节点匀质，则有

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}u_i(t), \quad i \in \mathcal{N}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} p_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}. \quad (3-1)$$

节点 i 的局部控制器采用邻域车辆的状态信息进行线性反馈，假设控制器为匀质，且不考虑通信时延问题，有

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \left[k_p (p_i(t) - p_j(t) - d_{i,j}) + k_v (v_i(t) - v_j(t)) + k_a (a_i(t) - a_j(t)) \right]. \quad (3-2)$$

根据第2章中四元素模型构建过程，线性匀质队列的闭环动力学方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{X}(t), \quad (3-3)$$

其中， \mathbf{X} 为队列的 N 个跟随车辆的集总状态向量，其定义为式(2-41)； \mathbf{A}_c 为系统闭环特征矩阵，

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{L} + \mathbf{P}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T, \quad (3-4)$$

其中， $\mathbf{k} = [k_p, k_v, k_a]^T$ 为控制器增益， \mathbf{L} 和 \mathbf{P} 分别为信息流拓扑结构的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵。

3.1.2 正实信息流拓扑结构分析

根据式(3-4)， $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ 对矩阵 \mathbf{A}_c 的特征根有直接影响，即对闭环稳定性有直接影响。然而，任意给定一种信息流拓扑结构，难以解析地分析该结构下队列的闭环稳定性。为方便后续稳定性的分析，首先讨论一类信息流拓扑结构对应 $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ 矩阵的性质。

定义 3-1: 若 \mathcal{G}_{N+1} 所对应的 $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ 矩阵，其特征根 $\lambda_i > 0, i \in \mathcal{N}$ ，则称 \mathcal{G}_{N+1} 满足正实特性。

下面的定理阐述了一类满足正实特性的信息流拓扑结构。

定理 3-1: 若 \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树，且满足下面任一条件，则 \mathcal{G}_{N+1} 满足正实特性，即 $\lambda_i > 0, i \in \mathcal{N}$ 。(下列条件中 h 表示节点 i 在跟随车辆中能有效获取信息的范围)

- 1) 队列中跟随车辆的信息流属于“前视”类型，即 $\mathbb{N}_i = \{i - h, \dots, i - 1\} \cap \{1, \dots, N\}, i \in \mathcal{N}$;
- 2) 队列中跟随车辆的信息流属于对称的“前视”及“后视”类型，即 $\mathbb{N}_i = \{i - h, \dots, i + h\} \cap \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}, i \in \mathcal{N}$;
- 3) 队列中跟随车辆的信息流属于无向结构，即 $j \in \mathbb{N}_i \Leftrightarrow i \in \mathbb{N}_j, i \in \mathcal{N}$ 。

证明: 证明过程分为两步。

首先，证明对于存在以领航节点为根节点有向生成树的 \mathcal{G}_{N+1} ，其对应 $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ 矩阵特征根的实部均为正数，即 $\text{Re}(\lambda_i) > 0, i \in \mathcal{N}$ 。根据矩阵 \mathbf{L} 的定义(2-14)，

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N l_{ij} = 0 \\ l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N |l_{ij}| \geq 0 \end{cases}, i \in \mathcal{N}. \quad (3-5)$$

同时，根据矩阵 \mathbf{P} 的定义(2-15)，有 $p_i \geq 0$ 。因此，对于矩阵 $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ ，有

$$|l_{ii} + p_i| = |l_{ii}| + |p_i| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^N |l_{ij}|, i \in \mathcal{N}. \quad (3-6)$$

根据附录 A 中的 Geršgorin 圆盘引理 (引理 A-7), $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的所有特征根均落在下面 N 个圆盘的并集内

$$\bigcup_{i=1}^N \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - l_{ii} - p_i| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N |l_{ij}|\}. \quad (3-7)$$

由式 (3-6) 及式 (3-7) 可知, $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的所有特征根均在下述区域中

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \left| \lambda - \max_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} (l_{ii} + p_i) \right| \leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} (l_{ii} + p_i) \right\}. \quad (3-8)$$

因此, 所有的特征根均属于

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \cup \{0\}\}. \quad (3-9)$$

此外, 根据有向生成树条件, 至少存在一个跟随节点能够获得领航节点的信息, 即 $\exists i \in \mathcal{N}, p_i = 1$. 不失一般性, 假设存在两个跟随节点 r_1 和 r_2 被领航节点牵引, 即 $p_{r_1} = 1, p_{r_2} = 1$. 此时, 不等式 (3-6) 对 $i = r_1$ 和 $i = r_2$ 严格成立. 将 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 视为引理 A-8 中定义的矩阵 \mathcal{Q} , 根据定义 $J = \{r_1, r_2\}$.

考虑到有向生成树假设, 对于任意不能被领航节点直接牵引的节点 i (即 $i \notin J$), 则必至少存在一个有向路径 $\{\alpha_r, \alpha_{i_\zeta}, \dots, \alpha_{i_1}, \alpha_i\}$ 从节点 $r \in J$ 到节点 i . 此时, 所对应 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的元素 (即 $l_{ii_1} + p_{ii_1}, l_{i_1 i_2} + p_{i_1 i_2}, \dots, l_{i_\zeta r} + p_{i_\zeta r}$) 全部非零. 从而, 根据引理 A-8, 矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 非奇异. 结合式 (3-9), 可知 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 矩阵特征根实部均为正数, 即

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, i \in \mathcal{N}. \quad (3-10)$$

下面, 证明满足定理 3-1 中条件 1) ~ 3) 中任何一个时, 有 $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \mathcal{N}$.

当满足条件 1) 时, \mathcal{L} 为下三角矩阵. 同时, \mathcal{P} 为对角矩阵. 因此, $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 亦为下三角矩阵. 这意味着 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 所有特征根均为实数, 即

$$\lambda_i = l_{ii} + p_i, i \in \mathcal{N}. \quad (3-11)$$

当满足条件 2) 或者 3) 时, \mathcal{L} 为对称矩阵. 因此 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 同样为对称矩阵, 这意味着 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 所有特征根均为实数, 即 $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \mathcal{N}$.

综上, \mathcal{G}_{N+1} 满足正实特性, 即 $\lambda_i > 0, i \in \mathcal{N}$. ■

评注 3-1. 在上述证明过程中, 第一步结果与文献[46][48][58]相符. 文献[48]的证明过程利用了下述性质: 包含有向生成树时, $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 为不可简约 (irreducible)

矩阵。本文第一步的证明方法与文献[58]相近。

3.1.3 控制器增益稳定性区域

本节讨论给定队列规模 N ，以及信息流拓扑结构（即给定 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ ），如何解析地给出控制器增益（即 \mathbf{k} ）的稳定范围。这一问题等价于分析使得矩阵 \mathbf{A}_c 的特征根为负实部，控制器增益 \mathbf{k} 的范围。

一般而言，特征根的分析随着矩阵规模增大而相应变难。本节采用矩阵因子分解技术将大规模队列的闭环稳定性分析，等价地转化为多个解耦子系统的稳定性分析，且子系统的规模仅和单个节点的动力学规模相同，与队列规模无关。

下面的定理解析地给出一类信息流拓扑结构下控制器增益的稳定区域。

定理 3-2: 给定一个线性匀质队列，其动力学由式 (3-3) 描述。若信息流拓扑结构满足**定理 3-1** 的条件，则队列闭环稳定当且仅当

$$\begin{cases} k_p > 0 \\ k_v > k_p \tau / \min_{i \in \mathcal{N}} (\lambda_i k_a + 1) \\ k_a > -1 / \max_{i \in \mathcal{N}} (\lambda_i) \end{cases} \quad (3-12)$$

证明: 证明过程分为两步。

首先，证明式 (3-3) 闭环稳定性等价于 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T, \forall i \in \mathcal{N}$ 均为 Hurwitz 矩阵。根据**定理 3-1**，有 $\lambda_i > 0, i \in \mathcal{N}$ 。从而，存在一个非奇异矩阵 \mathbf{W} ，使得

$$\mathbf{W}^{-1}(\mathcal{L} + \mathcal{P})\mathbf{W} = \mathbf{J}, \quad (3-13)$$

其中， $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的约当标准型，即

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\bar{\lambda}_1) & & & \\ & J_{n_2}(\bar{\lambda}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_r}(\bar{\lambda}_r) \end{bmatrix}, \quad (3-14)$$

其中 $\bar{\lambda}_i$ 是矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的特征根， $\sum_{i=1}^r n_i = N$ 和 $J_{n_1}(\bar{\lambda}_1), J_{n_2}(\bar{\lambda}_2), \dots, J_{n_r}(\bar{\lambda}_r)$ 是规模为 n_1, n_2, \dots, n_r 的约当块。从而，对 \mathbf{A}_c 进行相似变换可以得到块对角矩阵，

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_c &= (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N)^{-1} \cdot \mathbf{A}_c \cdot (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N) \\ &= (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N)^{-1} \cdot (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T) \cdot (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N) \\ &= \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T. \end{aligned} \quad (3-15)$$

将约当标准型 \mathbf{J} 的对角元素表示为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ ，即

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} = \left\{ \underbrace{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\bar{\lambda}_r, \dots, \bar{\lambda}_r}_{n_r} \right\}.$$

则有

$$S(\mathbf{A}_c) = S(\tilde{\mathbf{A}}_c) = \bigcup_{i=1}^N \{S(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T)\}, \quad (3-16)$$

其中, $S(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的谱 (spectrum)。因此, 式 (3-3) 闭环稳定性等价于 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T, \forall i \in \mathcal{N}$ 均为 Hurwitz 矩阵。

下面, 证明式 (3-12) 刻画出控制器增益的稳定区域。

矩阵 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T$ 的特征多项式为

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T)| = s^3 + \frac{\lambda_i k_a + 1}{\tau} s^2 + \frac{\lambda_i k_v}{\tau} s + \frac{\lambda_i k_p}{\tau}. \quad (3-17)$$

式 (3-17) 的稳定性可用 Routh-Hurwitz 判据进行检验,

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & \frac{\lambda_i k_v}{\tau} \\ s^2 & \frac{\lambda_i k_a + 1}{\tau} & \frac{\lambda_i k_p}{\tau} \\ s^1 & \frac{\lambda_i k_v (\lambda_i k_a + 1) - \lambda_i k_s \tau}{\tau (\lambda_i k_a + 1)} & \\ s^0 & \frac{\lambda_i k_p}{\tau} & \end{array}. \quad (3-18)$$

由于 $\tau > 0, \lambda_i > 0, i \in \mathcal{N}$, 所以, 式 (3-17) 渐近稳定当且仅当

$$\begin{cases} k_p > 0 \\ k_v > k_p \tau / (\lambda_i k_v + 1), i \in \mathcal{N}. \\ k_a > -1/\lambda_i \end{cases} \quad (3-19)$$

因此, $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T, i \in \mathcal{N}$ 渐近稳定, 即队列 (3-3) 闭环稳定当且仅当式 (3-12) 成立。 ■

评注 3-2. 相似变换式 (3-15) 将一个队列 (3-3) 解耦为多个子系统, 且子系统的规模仅和节点动力学维数相同, 与队列规模无关。这种技术源自 Fax 与 Murry 的一项开创性工作^[93], 此后被广泛地运用在相关研究中, 比如[48][52][58][113]。

评注 3-3. 若队列中车辆的加速度信息是不可获取的, 则式 (3-2) 中控制器增益 $k_a = 0$ 。此时, 队列 (3-3) 闭环稳定当且仅当

$$k_p > 0, k_v > k_p \tau. \quad (3-20)$$

早期队列是基于雷达获取信息，这种情况下难以获取他车加速度信息。此时，只需要控制器增益满足式(3-20)，则可以保证系统的闭环稳定性。

评注 3-4. 式(3-20)中的结论与 Ghasemi 等(2013)的结果相符^{[62][92]}。Ghasemi 等采用偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)近似方法得到了类似的结果^{[62][92]}，但是他们的结果仅适合 BD 和 BDL 拓扑结构。本文的结果具有一般性，可以适合一类信息流拓扑结构，只要满足**定理 3-1**中条件(或者正实条件)。注意到这一条件可以覆盖图 1-3 中所有的信息流拓扑结构。

评注 3-5. **定理 3-1**中条件保证了 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 具有正实数特征根，从而导致三阶 Routh-Hurwitz 判定条件式(3-18)。因此，可以解析地得到控制器增益的稳定区域。对于任一信息流拓扑结构，矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的特征根可能为复数，从而 Routh-Hurwitz 判定条件为六阶，此时难以解析获得控制器增益的稳定区域。

评注 3-6. 由式(3-12)可知，信息流拓扑结构对控制器增益稳定区域的影响全部由 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的特征根体现。通过选择拓扑结构，可以得到较大的增益稳定区域。此时，增益稳定区域增大带来的设计自由度，具有改进队列其他性能的潜能，比如队列稳定性等。

3.2 双向拓扑结构下稳定裕度分析

定理 3-2 解析地给出一类信息流拓扑结构下，队列控制器增益的稳定区域。一般而言，队列的稳定裕度(stability margin)会随着队列规模增大而衰减^{[82][83]}。

如图 3-1 所示，稳定裕度是指稳定闭环特征根与虚轴距离的最小值，可以用于刻画队列对初始误差的衰减速度。利用矩阵特征根分析，本节给出双向拓扑结构(BD 和 BDL 结构)队列的稳定裕度随规模增长的变化趋势。

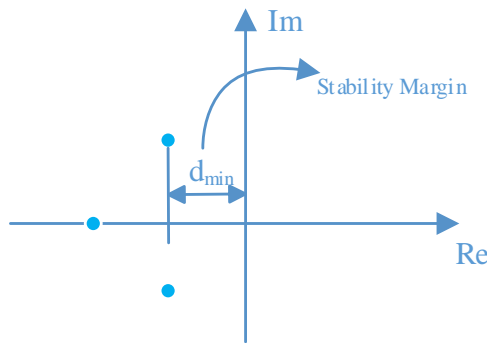


图 3-1 稳定裕度定义的直观描述

陈述主要结果之前，先给出一个引理。

引理 3-1. 给定一个实系数多项式

$$p(s, \lambda) = s^3 + \frac{\lambda k_3 + 1}{\tau} s^2 + \lambda \frac{k_2}{\tau} s + \lambda \frac{k_1}{\tau}, \quad (3-21)$$

其中， s 为自变量， k_1, k_2, k_3, τ 为常数，参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 。若 (3-21) 渐近稳定，则有

- 1) 式 (3-21) 有一个实根以 $O(\lambda)$ 的速度趋近于 $-1/\tau$ ，且另外两个共轭复根的实部以 $O(\lambda)$ 趋向于零；
- 2) 式 (3-21) 没有任何一个根的实部接近于零，除非参数 λ 接近于零；

证明： 首先证明结论 1。考虑一个一般性的三次多项式，

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + d. \quad (3-22)$$

当参数 λ 接近于零时，有

$$\begin{cases} b = \frac{\lambda k_3 + 1}{\tau} = \frac{1}{\tau} + O(\lambda) \\ c = \lambda \frac{k_2}{\tau} = O(\lambda) \\ d = \lambda \frac{k_1}{\tau} = O(\lambda) \end{cases}. \quad (3-23)$$

根据三次多项式的特征根判别式^[114]，

$$\Delta = b^2c^2 + 18bcd - 4b^3d - 4c^3 - 27d^2. \quad (3-24)$$

考虑到式 (3-23)，当参数 λ 足够小时，有

$$\Delta = O(\lambda^2) + O(\lambda^2) - O(\lambda^1) - O(\lambda^2) - O(\lambda^3) < 0. \quad (3-25)$$

所以，当参数 λ 足够小时，多项式 (3-22) 有一个实根和一对复根^[114]。不妨假设式 (3-22) 的根为 $\xi, \gamma \pm j\beta$ ，其中 $j = \sqrt{-1}$ ，则有

$$s^3 - (\xi + 2\gamma)s^2 + (\gamma^2 + \beta^2 + 2\gamma\xi)s - (\gamma^2 + \beta^2)\xi = 0. \quad (3-26)$$

对比式 (3-21) 和式 (3-26)，当参数 λ 足够小时，有

$$\begin{cases} \xi + 2\gamma = -\frac{\lambda k_3 + 1}{\tau} = -\frac{1}{\tau} + O(\lambda) \\ \gamma^2 + \beta^2 + 2\gamma\xi = \lambda \frac{k_2}{\tau} = O(\lambda) \\ (\gamma^2 + \beta^2)\xi = -\lambda \frac{k_1}{\tau} = O(\lambda) \end{cases}. \quad (3-27)$$

从而得到

$$\begin{cases} \xi = -\frac{1}{\tau} + O(\lambda) \\ \gamma^2 + \beta^2 = O(\lambda) \\ \gamma = O(\lambda) \end{cases} \quad (3-28)$$

因此, 当参数 λ 接近于零时, 多项式 (3-22) 有一个实根有以 $O(\lambda)$ 的速度趋近于 $-1/\tau$, 且另外两个共轭复根的实部以 $O(\lambda)$ 趋向于零。

接下来证明结论 2。假设式 (3-22) 的三个根分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 则有

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = b = -\frac{\lambda k_3 + 1}{\tau} \\ \xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_2 \cdot \xi_3 + \xi_1 \cdot \xi_3 = c = \lambda \frac{k_2}{\tau} \\ \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 = d = -\lambda \frac{k_1}{\tau} \end{cases} \quad (3-29)$$

由于式 (3-22) 稳定, 根据 Routh-Hurwitz 判定条件 $b, c, d > 0$, 且 k_1, k_2, k_3, τ 为常数。所以, 根据式 (3-29) 可以判断, ξ_1, ξ_2, ξ_3 中没有任何一个根的实部接近于零, 除非 λ 接近于零。

■

下面将阐述本节中的主要定理。

定理 3-3: 给定一个线性匀质队列, 其闭环动力学由式 (3-3) 描述, 且控制器参数满足定理 3-2 中的条件, 则有

1) 若 \mathcal{G}_{N+1} 为 BD 结构, 则队列稳定裕度随队列规模的增大以 $O(1/N^2)$ 速度衰减到零;

2) 若 \mathcal{G}_{N+1} 为 BDL 结构, 则 $\mathcal{L}_{BDL} + \mathcal{P}_{BDL}$ 的特征根均大于或等于 1, 且只有 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{BDL} + \mathcal{P}_{BDL}) = 1$, $\sigma_2(\mathcal{L}_{BDL} + \mathcal{P}_{BDL})$ 以 $O(1/N^2)$ 速度趋向于 1。

证明: 首先证明结论 1。用 $\mathcal{L}_{BD} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 和 $\mathcal{P}_{BD} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 分别表示 BD 结构下的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵, 为

$$\mathcal{L}_{BD} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{P}_{BD} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

所以, \mathcal{L}_{BD} 与 \mathcal{P}_{BD} 之和可以写为

$$\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{BD} & -\mathbf{e}_{BD} \\ -\mathbf{e}_{BD}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-30)$$

其中, $\mathbf{Z}_{\text{BD}} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, $\mathbf{e}_{\text{BD}} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 1}$ 定义为

$$\mathbf{Z}_{\text{BD}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{\text{BD}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

同时, \mathbf{Z}_{BD} 可以分解为 $\mathbf{Z}_{\text{BD}} = 2\mathbf{I}_{N-1} - \mathbf{H}$, 其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

此外, 矩阵 \mathbf{H} 的特征根可以解析得到^[115]

$$\sigma_{N-i}(\mathbf{H}) = 2\cos\frac{i\pi}{N}, i \in \mathcal{N}.$$

所以, 矩阵 \mathbf{Z}_{BD} 的特征根为

$$\sigma_i(\mathbf{Z}_{\text{BD}}) = 2 - 2\cos\frac{i\pi}{N} = 4\sin^2\frac{i\pi}{2N}, i \in \mathcal{N}. \quad (3-31)$$

根据引理 A-9, 有

$$\begin{cases} \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \leq \sigma_{\min}(\mathbf{Z}_{\text{BD}}) = 4\sin^2\frac{i\pi}{2N} \leq \frac{\pi^2}{N^2} \\ \sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \leq \sigma_2(\mathbf{Z}_{\text{BD}}) = 4\sin^2\frac{\pi}{N} \leq \frac{4\pi^2}{N^2} \end{cases}. \quad (3-32)$$

式 (3-32) 给出了 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$ 和 $\sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$ 的上界。此外, 根据定理 3-1 可知, $\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}$ 属于对称正定矩阵。因此有 $\sigma_i((\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})^{-1}) > 0$, 以及 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) = 1/\sigma_{\max}((\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})^{-1})$ 。

另外, $(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})^{-1}$ 可以显式表达为

$$(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & N-1 & N-1 \\ 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \end{bmatrix}$$

所以根据引理 A-9, 有

$$\sigma_{\max}((\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})^{-1}) \leq N + \sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{N(N+1)}{2}. \quad (3-33)$$

因此, $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$ 的上下界为

$$\frac{\pi^2}{N^2} \geq \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \geq \frac{2}{N(N+1)} \geq \frac{1}{N^2} \quad (3-34)$$

式 (3-34) 表明, $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$ 以 $O(1/N^2)$ 趋向于零。根据定理 3-1 和引理 3-1 可知, BD 结构下队列稳定裕度随队列规模的增长, 以 $O(\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})) = O(1/N^2)$ 趋向于零, 即结论 1 成立。

接下来证明结论 2。在 BDL 结构下, 为利用结论 1 中部分结果, 假设队列中有 $N+1$ 跟随车辆。相应的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵表分别示为 $\mathcal{L}_{\text{BDL}} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ 和 $\mathcal{P}_{\text{BDL}} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ 。这两个矩阵之和为

$$\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & -1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

$\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}$ 可分解为 $\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}} = \mathbf{I}_{N+1} + \mathbf{Z}_{\text{BDL}}$, 其中, $\mathbf{Z}_{\text{BDL}} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ 定义为

$$\mathbf{Z}_{\text{BDL}} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & \mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}} \end{bmatrix}$$

根据引理 A-9 有 $\sigma_{\min}(\mathbf{Z}_{\text{BDL}}) \leq \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \leq \sigma_2(\mathbf{Z}_{\text{BDL}}) \leq \sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$, 所以我们得到 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$ 和 $\sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$ 的上下界, 如下

$$\begin{cases} \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) \leq 1 + \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \leq 1 + \frac{\pi^2}{N^2} \\ \sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) \leq 1 + \sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \leq 1 + \frac{4\pi^2}{N^2} \\ \sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) \geq 1 + \sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \geq 1 + \frac{1}{N^2} \end{cases} \quad (3-36)$$

定义向量 $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N+1}$, 根据式 (3-35) 可知

$$(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (3-37)$$

结合式 (3-36) 有, $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) = 1$, 且 $\sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}}) = 1 + O(1/(N+1)^2)$ 。

■

评注 3-7. 给定满足**定理 3-1**条件的任一信息流拓扑结构，且控制器增益满足**定理 3-2**的条件，则根据**定理 3-2**和**引理 3-1**可知，

- 1) 若 $\sigma_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{P})$ 不趋向于零，则队列肯定有一定的稳定裕度；
- 2) 若 $\sigma_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{P})$ 衰减到零，则队列稳定裕度随队列规模增长以 $O(\sigma_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{P}))$ 速度趋向于零。

评注 3-8. 根据**引理 3-1**，队列稳定裕度分析的可行性取决于 $\mathbf{L} + \mathbf{P}$ 的特征根是否解析可得。一般而言，解析地获得任意矩阵特征根是比较困难的^[131]。本文目前只讨论了 BD 和 BDL 拓扑结构对应矩阵的特征根，注意到这两种结构也得到了广泛的研究，比如[62]-[64][82][83][92]。

评注 3-9. **定理 3-3** 中结论 1 表明，队列稳定裕度随队列规模增长衰减到零的速度为 $O(1/N^2)$ ，这与控制器增益的设计无关。该结论与文献[63][82]相符，该文献是采用 PDE 方法近似队列动力学进行分析。此外，本文结果考虑了车辆动力系统的时滞因素，而文献[63][82]将车辆节点直接假设为二阶积分器环节。因此，本文结论更加符合实际车辆队列的性能特点。

评注 3-10. **定理 3-3** 中结论 2 表明，当领航车辆将自己的状态信息广播给全部跟随车辆，形成 BDL 结构时，对应的 $\sigma_{\min}(\mathbf{L}_{\text{BDL}} + \mathbf{P}_{\text{BDL}})$ 等于 1，且与队列规模无关。根据**引理 3-1**可知，该结构下的队列总存在一定的稳定裕度，且该稳定裕度与队列规模无关。

评注 3-11. 采用类似的分析框架，可知 PF 结构下 $\mathbf{L}_{\text{PF}} + \mathbf{P}_{\text{PF}}$ 所有特征根均为 1，且与队列规模无关。然而，PF 结构下最小特征根的代数重数与队列规模 N 相同，这会导致瞬态过程中误差出现几何增长（大峰值）的现象。该情况下，会出现运动模态 $t^k e^{\text{Re}(\mu)t}$, $k = 1, \dots, N - 1$ ，其中 μ 为代数重数为 N 的闭环特征根。

3.3 稳定裕度的两种改善方法

由式 (3-3) 可知，队列闭环动力学是车辆节点动力学、信息流拓扑结构、控制器参数、队列构型的函数。从而，队列性能指标会受到上述四个元素的影响。

在给定节点动力学为三阶状态空间模型、队列构型为恒定距离型时，本节从信息流拓扑结构选取和控制器参数两个角度，讨论队列稳定裕度的改进方法。

3.3.1 信息流拓扑结构选取

本节针对无向信息流拓扑结构 (undirected information flow, UIF) 下匀质队列

的稳定裕度进行分析。根据第2章中介绍的四元素构架，UIF结构下线性匀质队列的闭环动力学方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_{c,UIF} \cdot \mathbf{X}(t), \quad (3-38)$$

其中， $\mathbf{A}_{c,UIF}$ 为系统闭环特征矩阵，

$$\mathbf{A}_{c,UIF} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathcal{L}_{UIF} + \mathcal{P}_{UIF}) \otimes \mathbf{B} \mathbf{k}^T, \quad (3-39)$$

\mathcal{L}_{UIF} 和 \mathcal{P}_{UIF} 分别为与 UIF 对应的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵。

实际上，UIF 结构包含了一类拓扑结构，其中一类常见的是 h -邻域 UIF 结构，如图 3-2 所示。

定义 3-2: (h -邻域 UIF 结构) 信息流拓扑结构属于 h -邻域 UIF 结构，如果任意节点都能在跟随车辆集中获取与其最相邻的 h 个邻居的信息，即 $\mathbb{N}_i = \{i-h, \dots, i+h\} \cap \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ ，不论有多少跟随车辆被领航车辆所牵引。

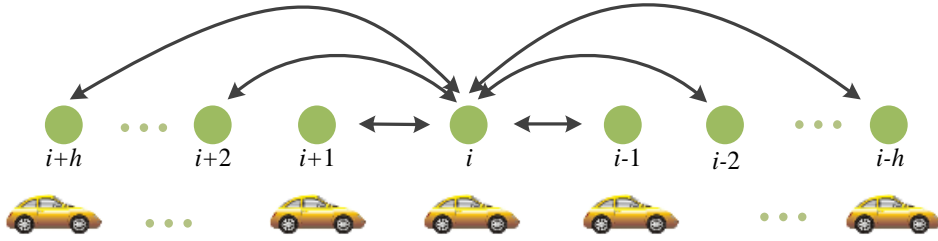


图 3-2 h -邻域 UIF 结构

在 h -邻域 UIF 结构中， h 可以表示能够有效通信的范围。当 $h = N - 1$ 时，该结构称为全连通，即任一节点均能获取所有跟随车辆的信息。

下面阐述本节的主要定理。

定理 3-4: 给定一个 UIF 结构下线性匀质队列，其闭环动力学由式 (3-38) 描述，则有

1) 队列 (3-38) 闭环稳定当且仅当

$$\begin{cases} k_p > 0 \\ k_v > k_p \tau / \min_{i \in \mathcal{N}} (\lambda_i k_a + 1), \\ k_a > -1 / \max_{i \in \mathcal{N}} (\lambda_i) \end{cases} \quad (3-40)$$

其中， λ_i 为矩阵 $\mathcal{L}_{UIF} + \mathcal{P}_{UIF}$ 的特征根；

2) 队列 (3-38) 的稳定裕度随队列规模增加而衰减到零，除非存在大量跟随车辆 ($O(N)$) 被领航车辆牵引。

证明：首先证明结论 1。根据**定理 3-1**，UIF 结构符合正实特性。从而由**定理 3-2**可知，UIF 结构下线性匀质队列渐近稳定当且仅当式 (3-40) 成立。

再证明结论 2。由**引理 A-10** 的 Rayleigh-Ritz 定理可知

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}^T (\mathcal{L}_{\text{UIF}} + \mathcal{P}_{\text{UIF}}) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}. \quad (3-41)$$

因此，选择 $\mathbf{x} = \mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ，有

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}^T (\mathcal{L}_{\text{UIF}} + \mathcal{P}_{\text{UIF}}) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^T \mathcal{L}_{\text{UIF}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathcal{P}_{\text{UIF}} \mathbf{x}}{N}. \quad (3-42)$$

根据拉普拉斯矩阵的定义 (2-15)，可知

$$\mathbf{x}^T \mathcal{P}_{\text{UIF}} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N p_i = \Omega(N), \quad (3-43)$$

其中， $\Omega(N)$ 为被领航车辆直接牵引的跟随车辆个数。结合**定理 3-1** 的正实特性， $\mathcal{L}_{\text{UIF}} + \mathcal{P}_{\text{UIF}}$ 矩阵最小特征根的上下界为

$$0 < \lambda_{\min} \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathcal{L}_{\text{UIF}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathcal{P}_{\text{UIF}} \mathbf{x}}{N} = \frac{\Omega(N)}{N}. \quad (3-44)$$

若没有足够跟随车辆被领航车辆牵引，即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Omega(N)}{N} = 0. \quad (3-45)$$

则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} = 0. \quad (3-46)$$

根据**引理 3-1** 可知， $\mathbf{A} - \lambda_{\min} \mathbf{B} \mathbf{k}^T$ 中两个根的实部会以 $O(\lambda_{\min})$ 速度趋向于零。此时，队列稳定裕度随着队列规模的增大而衰减到零。

如果有足够的跟随车辆被领航车辆所牵引，即满足

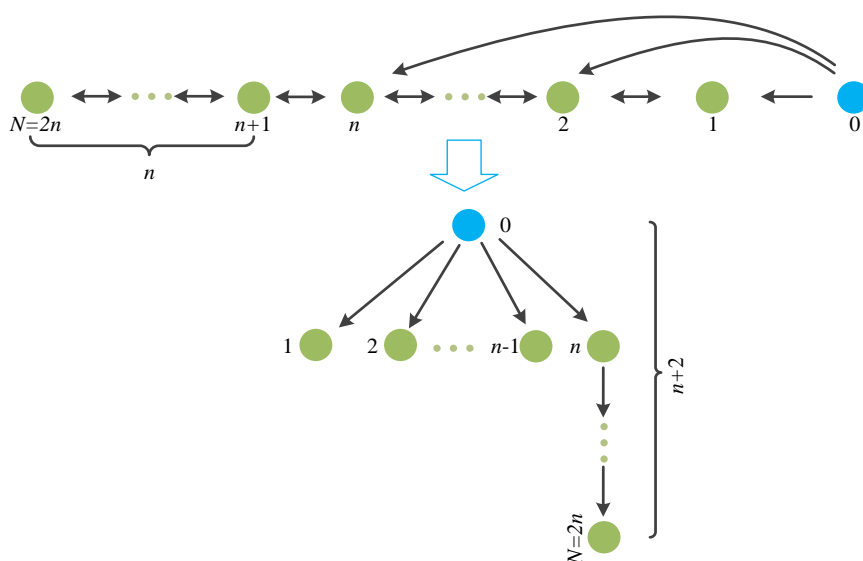
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Omega(N)}{N} = \text{const} \in (0, 1] \Rightarrow \Omega(N) = O(N). \quad (3-47)$$

则队列稳定裕度有可能不会因为队列规模的增加而衰减到零。 ■

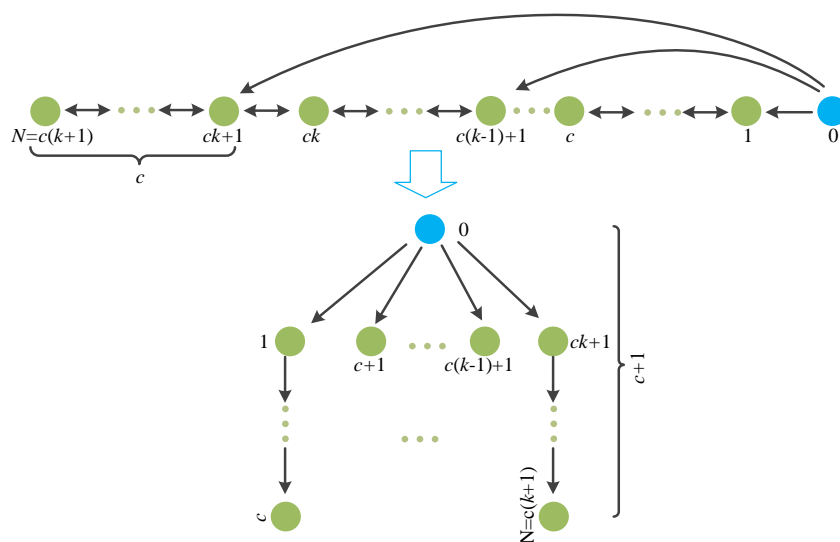
评注 3-12. **定理 3-4** 中的结论 2 指出了 UIF 结构下线性匀质队列的稳定裕度与队列规模的关系，这一结论与文献[78][98]结论相符。然而，文献[78][98]中车辆动力学是假设为质量块（二阶模型），而本文进一步考虑了车辆动力系统的时滞效应

(三阶模型)。

评注 3-13. 从稳定裕度的角度, **定理 3-4** 中结论 2 表明来自领航车辆的信息流比跟随车辆之间的信息流更为重要。即使跟随车辆之间的信息流为全连通(**strongly connected**), 稳定裕度依然会衰减到零, 除非存在大量的跟随车辆被领航车辆牵引。直观而言, 跟随车辆之间的信息流可以调节局部跟车误差。然而, 队列的最终目标是需要跟随领航车辆的轨迹, 所以领航车辆需要牵引一定数量的跟随车辆以保证稳定裕度。



(a) UIF 结构中有一个有向生成树, 其树深与规模等阶



(b) UIF 结构中有一个有向生成树, 其树深 c 与规模无关

图 3-3 两类 UIF 结构下的车辆队列

评注 3-14. 若每个跟随车辆均能获取领航车辆的信息，比如 BDL 结构，此时 $\Omega(N) = N$ 。**定理 3-3** 已指出该类型的队列，其稳定裕度与队列规模无关。而其他信息流拓扑结构结构，比如 BD 结构 ($\Omega(N) = 1$)，则存在固有缺陷，其稳定裕度会随队列规模增大而衰减到零^{[37][63][82][83]}。这也符合**定理 3-4** 的结论。

评注 3-15. **定理 3-4** 中的结论 2 只是保证稳定裕度的必要条件。即使能获取领航车辆信息的跟随车辆个数为 $\Omega(N) = O(N)$ ，其稳定裕度依然可能会随队列规模增长而衰减。在本文中，给出一个猜想：要使得 UIF 结构下队列稳定裕度与规模无关，则 \mathcal{G}_{N+1} 中树的深度 (tree depth) 应为常数，且与队列规模 N 无关。注意这里树的深度定义如下 (与文献[110]中标准定义有所区别)。

定义 3-3: 图 \mathcal{G}_{N+1} 中树的深度 c 定义为

$$c = \max\{n_1, n_2 - n_1, \dots, n_p - n_{p-1}, N - n_p + 1\}. \quad (3-48)$$

其中， $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}, 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_p \leq N$ 为被领航车辆牵引的跟随车辆集合。

图 3-3 展示了两类 UIF 结构。在后面仿真部分可以看到，其中之一 (图 3-3(a)， $\Omega(N) = O(N), c = N/2$) 随着队列规模增加，稳定裕度会衰减到零；而另外一个 (图 3-3 (b)， $\Omega(N) = O(N), c$ 为常数)，其稳定裕度则与队列规模无关。

3.3.2 非对称控制器设计

上一小节中，**定理 3-4** 指出信息流拓扑结构选择对稳定裕度有较大的影响。要保证稳定裕度，对于 UIF 结构下线性匀质控制器，需要足够数量的跟随车辆获取领航车辆的状态信息。但当队列规模变大时，这会导致很大的通讯代价。

非对称控制器具有改善稳定裕度的能力，最近也得到不少学者的关注^{[75][63][107][109]}。本小节聚焦一种特殊 UIF 结构 (即 BD 结构)，证明非对称控制器设计能大幅度提高队列的稳定裕度。关于非对称控制的具体定义见第 2.3.3 节，图 2-5 直观地给出了 BD 结构下的非对称控制架构。根据四元素框架，以及第 2.3.3 节中的推导，BD 结构下非对称控制的匀质队列，其闭环动力学表达为

$$\dot{X}(t) = A_{c, \text{BD}} \cdot X(t), \quad (3-49)$$

其中，

$$A_{c, \text{BD}} = I_N \otimes A - (\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})_{\epsilon} \otimes Bk^T. \quad (3-50)$$

下面，阐述本小节的主要结论。

定理 3-5: 给定一个 BD 结构下非对称控制的匀质队列，其动力学由式 (3-49)

描述, 则

1) 队列 (3-49) 渐近稳定当且仅当

$$\begin{cases} k_p > 0 \\ k_v > k_p \tau / \min_{i \in \{1, \dots, N\}} (\sigma_i(\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon) k_a + 1), \\ k_a > -1 / \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (\sigma_i(\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon)) \end{cases} \quad (3-51)$$

其中, 为了方便表述, $\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon$ 为矩阵 $(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})_\epsilon$;

2) 对于任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 则队列 (3-49) 总存在一定的稳定裕度, 且与队列规模 N 无关 (N 可以为任意有限常数)。

证明: 首先证明结论 1。 $\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon$ 为非对称矩阵, 可以通过相似变换等价转化为对称矩阵。选择 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^{\frac{N-1}{2}} \end{bmatrix}.$$

则有

$$\widetilde{\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon} = \mathbf{S}(\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon)\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\delta & & & \\ -\delta & 2 & -\delta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\delta & 2 & -\delta \\ & & & -\delta & 1+\epsilon \end{bmatrix}, \quad (3-52)$$

其中, $\delta = \sqrt{(1-\epsilon)(1+\epsilon)}$ 。根据附录 A 中的 **Geršgorin** 圆盘引理 (引理 A-7), 矩阵 $\widetilde{\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon}$ 的所有特征根均落在下面两个圆盘的并集内

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 2| \leq 2\delta\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - 1 - \epsilon| \leq \delta\}. \quad (3-53)$$

易知, $2 - 2\delta > 0$ 和 $1 + \epsilon - \delta > 0, \forall \epsilon \in (0, 1)$ 。因此, 有

$$\sigma_i(\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon) = \sigma_i(\widetilde{\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon}) > 0, i \in \mathcal{N}. \quad (3-54)$$

所以, 存在一个非奇异矩阵 \mathbf{W}_ϵ , 使得

$$\mathbf{W}_\epsilon^{-1} \cdot \mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon \cdot \mathbf{W}_\epsilon = \mathbf{J}_\epsilon, \quad (3-55)$$

其中, $\mathbf{J}_\epsilon \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是矩阵 $\mathcal{L}\mathcal{P}_\epsilon$ 的约当标准型。采用定理 3-2 中类似的矩阵因子分解可知

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{A}_{c, \text{BD}}) &= S(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathcal{LP}_\epsilon \otimes \mathbf{Bk}^T) \\
 &= \bigcup_{i=1}^N \{S(\mathbf{A} - \sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon) \mathbf{Bk}^T)\},
 \end{aligned} \tag{3-56}$$

从而，同样根据 Routh–Hurwitz 判据可知，队列 (3-49) 闭环稳定当且仅当式 (3-51) 成立。

下面证明结论 2。证明分为两步。

步骤一，首先证明 $\sigma_{\min}(\mathcal{LP}_\epsilon)$ 的上下界。 $\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon$ 可以重新写为

$$\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_\epsilon & -\mathbf{e}_\epsilon \\ -\mathbf{e}_\epsilon^T & 1 + \epsilon \end{bmatrix}, \tag{3-57}$$

其中， $\mathbf{Z}_\epsilon \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ， $\mathbf{e}_\epsilon \in \mathbb{R}^{(N-1) \times 1}$ 定义为

$$\mathbf{Z}_\epsilon = \begin{bmatrix} 2 & -\delta & & & \\ -\delta & 2 & -\delta & & \\ & -\delta & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\delta \\ & & & -\delta & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix}.$$

进一步， \mathbf{Z}_ϵ 可以分解为 $\mathbf{Z}_\epsilon = 2\mathbf{I}_{N-1} - \delta \cdot \mathbf{H}$ ，其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ，定义为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 \mathbf{H} 的特征根可解析地得到^[115]

$$\sigma_{N-i}(\mathbf{H}) = 2\cos \frac{i\pi}{N}, i \in \mathcal{N}.$$

所以，矩阵 \mathbf{Z}_ϵ 的特征根为

$$\sigma_i(\mathbf{Z}_\epsilon) = 2 - 2\cos \frac{i\pi}{N} = 4\sin^2 \frac{i\pi}{2N}, i \in \mathcal{N}. \tag{3-58}$$

根据引理 A-9，有

$$\sigma_{\min}(\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon) \leq \sigma_{\min}(\mathbf{Z}) = 2 - 2\delta\cos \frac{\pi}{N}. \tag{3-59}$$

式 (3-59) 实际上给出了 $\sigma_{\min}(\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon)$ 。为得到 $\sigma_{\min}(\mathcal{LP}_\epsilon)$ 的下界，定义

$$Y = (\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon) - \epsilon^2 I_N = \begin{bmatrix} 2-\epsilon^2 & -\delta & & & & \\ -\delta & 2-\epsilon^2 & -\delta & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\delta & 2-\epsilon^2 & -\delta & \\ & & & -\delta & 1+\epsilon-\epsilon^2 & \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

容易验证,

$$1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \geq (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \delta, \forall \epsilon \in (0,1) \quad (3-61)$$

因此, 有

$$\begin{cases} 2-\epsilon^2 - 2\delta \geq 2-\epsilon^2 - 2\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2\right) = 0, \\ 1 + \epsilon - \epsilon^2 - \delta \geq 1 + \epsilon - \epsilon^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2\right) > 0 \end{cases}, \forall \epsilon \in (0,1) \quad (3-62)$$

根据附录 A 中的 **Geršgorin** 圆盘引理(引理 A-7), 同时注意到 Y 为对称矩阵, 所以 Y 所有的特征根均为非负实数, 即 $\sigma_i(Y) \geq 0, i \in \mathcal{N}$ 。考虑到 Y 的定义式(3-60), 有

$$\sigma_{\min}(\widetilde{\mathcal{LP}}_\epsilon) = \sigma_{\min}(Y) + \epsilon^2 \geq \epsilon^2, \forall \epsilon \in (0,1) \quad (3-63)$$

结合式(3-59)和式(3-63)可知, \mathcal{LP}_ϵ 所有特征根均为正实数, 且不会随队列规模的增长而衰减到零, 即

$$2 - 2\sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \frac{\pi}{N} \geq \sigma_{\min}(\mathcal{LP}_\epsilon) \geq \epsilon^2, \forall \epsilon \in (0,1) \quad (3-64)$$

注意对于任意的有限整数 N , 矩阵 S 均可逆, 即上述结论均成立。式(3-64)给出了任意的有限规模下 $\sigma_{\min}(\mathcal{LP}_\epsilon)$ 的上下界。

步骤 2, 证明任意给定的 $\epsilon \in (0,1)$, 则队列总存在一定的稳定裕度, 且与队列规模 N 无关。根据式(3-56)知:

$$S(A_{c,BD}) = \bigcup_{i=1}^N \{S(A - \sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)Bk^T)\}$$

矩阵 $A - \sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)Bk^T$ 的特征多项式为:

$$\begin{aligned} & |sI - (A - \sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)Bk^T)| \\ &= s^3 + \frac{\sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)k_a + 1}{\tau} s^2 + \frac{\sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)k_v}{\tau} s + \frac{\sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon)k_p}{\tau} \end{aligned} \quad (3-65)$$

根据式(3-64), 任意给定 $\epsilon \in (0,1)$ 和有限常数 N , 有 $\sigma_i(\mathcal{LP}_\epsilon) \geq \sigma_{\min}(\mathcal{LP}_\epsilon) \geq \epsilon^2$ 。根据引理 3-1 可知多项式(3-65)的根均不会接近于零。因此, 队列(3-49)的最小特征根与虚轴之间总存在一定的间隙, 且该间隙与队列规模 N 无关。即任意给定的 $\epsilon \in (0,1)$, 总存在一定的稳定裕度, 且与队列规模 N 无关。

■

评注 3-16. 与定理 3-3 中的结论 1 相比, 定理 3-5 表明引入非对称控制可以显著的提升队列的稳定裕度。这说明, 控制器结构可能比控制器增益对队列性能的影响更大。

评注 3-17. 定理 3-5 表明非对称控制是另一种保证稳定裕度与队列规模无关的方法。这一结论与文献[29][63]相符, 文献[29][63]采用的 PDE 近似的方法, 该方法仅适合小非对称性问题。本文采用基于矩阵特征根分析方法, 该过程没有任何近似, 适合于任意大小非对称度。此外, 该结果也是文献[64]结论的拓展, 文献[64]中将车辆节点简化为二阶积分器进行分析。

3.4 基于 Riccati 方程的稳定控制器设计

定理 3-2 针对一类信息流拓扑结构下匀质队列, 解析地给出线性控制器增益的稳定区域。这意味着给定这类结构中一个具体的信息流拓扑结构, 我们均可以得到稳定的线性控制器增益。但如何选择具体增益的大小, 还需要进一步讨论。

通过对局部子系统的 Riccati 方程求解, 本节进一步给出一种控制器增益设计方法。该方法不仅能保证无时延下线性匀质队列的闭环稳定性, 且在一定条件下能保证时延一致时匀质队列的闭环稳定性。

3.4.1 时延为零时线性控制器增益设计

对于不存在时延的线性匀质队列, 其闭环动力学方程已在式(3-3)中给出。本节假设信息流拓扑结构满足定理 3-1 中的条件。下面的定理叙述了一种稳定控制器增益的设计方法。

定理 3-6: 给定一个线性匀质队列, 其动力学由式(3-3)描述。若信息流拓扑结构满足定理 3-1 的条件。控制器增益 \mathbf{k} 选择为

$$\mathbf{k}^T = \alpha \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\epsilon, \quad (3-66)$$

其中, α 为缩放因子 (scaling factor), \mathbf{P}_ϵ 为如下代数 Riccati 方程的唯一正定解

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_\epsilon + \mathbf{P}_\epsilon \mathbf{A} - \mathbf{P}_\epsilon \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\epsilon + \epsilon \mathbf{I}_3 = 0, \quad (3-67)$$

其中, ϵ 为一个正实数, 称为低增益因子。队列(3-3)闭环稳定, 若

$$\alpha \geq \frac{1}{2 \min_{i \in \mathcal{N}}(\lambda_i)}, \quad (3-68)$$

证明：定理 3-2 已证明

$$S(\mathbf{A}_c) = S(\tilde{\mathbf{A}}_c) = \bigcup_{i=1}^N \{S(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T)\}, \quad (3-69)$$

即队列 (3-3) 渐近稳定等价于 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T, i \in \mathcal{N}$ 均为 Hurwitz 矩阵。下面证明式 (3-68) 成立时, $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T, i \in \mathcal{N}$ 均为 Hurwitz 矩阵。

\mathbf{P}_ε 为代数 Riccati 方程 (3-67) 的正定解, 所以有

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T)^T \mathbf{P}_\varepsilon + \mathbf{P}_\varepsilon (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T) \\ & = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_\varepsilon + \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{A} - \lambda_i (\mathbf{k} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon + \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{k}^T). \end{aligned} \quad (3-70)$$

根据式 (3-66), 有

$$\begin{cases} \mathbf{k} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon = \alpha \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon \\ \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{k}^T = \alpha \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon \end{cases} \quad (3-71)$$

将式 (3-71) 代入式 (3-70) 中, 得到

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T)^T \mathbf{P}_\varepsilon + \mathbf{P}_\varepsilon (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T) \\ & = (1 - 2\lambda_i \alpha) \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon - \varepsilon \mathbf{I}_3. \end{aligned} \quad (3-72)$$

由于 $\mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon > 0$, 且 $\varepsilon \mathbf{I}_3 > 0$, 根据 Lyapunov 稳定性分析, 当

$$1 - 2\lambda_i \alpha \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3-73)$$

矩阵 $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{k}^T$ 均为 Hurwitz。因此当缩放因子 α 满足式 (3-68) 时, 结合式 (3-69) 可知, 队列 (3-3) 闭环稳定。 ■

评注 3-18. 定理 3-1 中指出信息流拓扑结构对控制器增益的稳定区域有直接的影响, 本节定理 3-6 也表明其拓扑结构同样对稳定控制器设计有直接影响, 即式 (3-68)。

评注 3-19. 代数 Riccati 方程 (3-67) 的求解仅和节点动力学的维数相关, 与队列规模无关。队列规模以及信息流拓扑结构的信息, 全部体现在缩放因子 α 的要求式 (3-68) 上。类似的技术也出现在 Ni 等的研究^[116]和 Zhang 等的研究^[117]。

评注 3-20. Stankovic 等采用包含原理 (inclusion principle) 将队列系统解耦成多个局部子系统, 然后针对子系统采用 LQR 方法设计控制器^[28]。这种方法仅适合与 PL 和 PLF 拓扑结构。而定理 3-6 的设计方法可以覆盖一大类信息流拓扑结构的稳定增益设计问题。

评注 3-21. **定理 3-6** 设计方法的一个局限在于, 若 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的最小特征根随规模增长而趋向于零, 则缩放因子 α 会趋向于无穷大。实际上, **BD** 结构以及一些其他结构会发生这种现象, 如**定理 3-3** 和**定理 3-4**。

3.4.2 时延一致时线性控制器增益设计

本节进一步讨论时延一致情况下, 线性匀质队列控制器的稳定增益设计。假设信息流拓扑结构满足**定理 3-1** 中的条件。控制器的形式为线性状态反馈, 但存在一致时延, 即

$$\begin{aligned} u_i(t) = & - \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \left[k_p (p_i(t - \gamma) - p_j(t - \gamma) - d_{i,j}) \right. \\ & + k_v (v_i(t - \gamma) - v_j(t - \gamma)) \\ & \left. + k_a (a_i(t - \gamma) - a_j(t - \gamma)) \right]. \end{aligned} \quad (3-74)$$

根据第 2 章中四元素模型的构架以及相关分析, 时延一致的线性匀质队列闭环动力学方程为

$$\dot{X}(t) = I_N \otimes A \cdot X(t) - (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes Bk^T \cdot X(t - \gamma). \quad (3-75)$$

引理 3-2^[118] 给定 P_ε 为代数 Riccati 方程 (3-67) 的正定解, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon = 0. \quad (3-76)$$

定理 3-7: 给定一个线性匀质队列, 其动力学由式 (3-75) 描述。若信息流拓扑结构满足**定理 3-1** 的条件。控制器增益 k 选择为式 (3-66)。缩放因子 α 满足

$$\alpha \geq \frac{1}{\min_{i \in \mathcal{N}}(\lambda_i)}. \quad (3-77)$$

则, 给定任何 $\gamma^* \geq 0$, 存在 $\varepsilon^* > 0$, 当低增益因子满足 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, 以及时延满足使得 $\gamma \in (0, \gamma^*]$ 时, 队列 (3-75) 渐近稳定。

证明: 类似于**定理 3-2** 的证明, 本定理的证明分为两步。

首先, 证明 (3-75) 的渐近稳定性等价于下面 N 个子系统渐近稳定

$$\dot{\xi}_i(t) = A\xi_i(t) + \lambda_i Bk^T \cdot \xi_i(t - \gamma), \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3-78)$$

注意到队列 (3-75) 可以表示为

$$\dot{X}(t) = (W \otimes I_N)(I_N \otimes A)(W^{-1} \otimes I_N) \cdot X(t) \quad (3-79)$$

$$-(\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N)(\mathbf{J} \otimes \mathbf{Bk}^T)(\mathbf{W}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N) \cdot \mathbf{X}(t - \gamma).$$

式 (3-79) 已使用相似变换 (3-13)。式 (3-79) 可以进一步写为

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\chi}(t) - (\mathbf{J} \otimes \mathbf{Bk}^T) \cdot \boldsymbol{\chi}(t - \gamma), \quad (3-80)$$

其中, $\boldsymbol{\chi} = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_N^T] = (\mathbf{W}^{-1} \otimes \mathbf{I}_N) \cdot \mathbf{X}$ 。若有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i(t)| = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3-81)$$

同时 $\mathbf{X} = (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_N) \cdot \boldsymbol{\chi}$, 则得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_i(t)| = 0, \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3-82)$$

这意味着队列达到渐近稳定。根据式 (3-80), $\xi_i(t)$ 的动力学满足如下方程:

$$\dot{\xi}_i(t) = \mathbf{A}\xi_i(t) + \lambda_i \mathbf{Bk}^T \cdot \xi_i(t - \gamma) + \delta_i \mathbf{Bk}^T \cdot \xi_{i+1}(t - \gamma), \quad (3-83)$$

其中, $\delta_i, \forall i \in \mathcal{N}$ 等于 1 或者 0, 且 $\xi_{N+1}(t) \equiv 0$ 。从而, 式 (3-83) 的稳定性等价于式 (3-78) 的稳定性。

以上说明了队列 (3-75) 渐近稳定与式 (3-78) 渐近稳定等价。

接下来, 证明满足定理 3-2 的条件时, 式 (3-78) 达到渐近稳定。

根据定理 3-6 可知, 式 (3-77) 成立时, $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{Bk}^T, \forall i \in \mathcal{N}$ 均为 Hurwitz 矩阵。从而由引理 B-4, 只需证明给定 $\gamma^* \geq 0$, 存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得对于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ 和 $\gamma \in (0, \gamma^*]$, 下面的条件成立

$$\det[j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A} + e^{-j\omega\gamma} \lambda_i \mathbf{Bk}^T] = \det[j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A} + \alpha \lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon] \neq 0, \quad (3-84)$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in [0, \gamma^*],$$

对于给定 $\gamma^* \geq 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\cos(\omega\gamma) > 1/2, \text{ s.t. } |\omega| < \delta, \gamma \in (0, \gamma^*], \quad (3-85)$$

下面, 将式 (3-84) 的证明分为 $|\omega| < \delta$ 和 $|\omega| \geq \delta$ 两种情况。

情况 1. 若 $|\omega| < \delta$, 根据式 (3-77) 和 (3-85), 有

$$\alpha \lambda_i \cos(\omega\gamma) > \frac{1}{2}, \gamma \in (0, \gamma^*], \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3-86)$$

结合代数 Riccati 方程 (3-67), 有

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A} - \alpha \lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon]^T \mathbf{P}_\varepsilon + \mathbf{P}_\varepsilon [\mathbf{A} - \alpha \lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon] \\ & = (1 - 2\lambda_i \alpha \cos(\omega\gamma)) \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon - \varepsilon \mathbf{I}_3 < 0, \end{aligned} \quad (3-87)$$

因此, $\mathbf{A} - \alpha\lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}_\varepsilon$ 为 Hurwitz 矩阵, 即当 $|\omega| < \delta$ 时式 (3-84) 成立。

情况 2. 验证式 (3-84) 在 $|\omega| \geq \delta$ 也成立。根据矩阵 \mathbf{A} 的定义 (3-1) 和附录中引理 A-5 有

$$|\det(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})| = \omega^2 \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)} = \prod_{i=1}^3 \sigma_i(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (3-88)$$

$$\|j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}\|_F^2 = 3\omega^2 + 2 + \frac{1}{\tau^2} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (3-89)$$

结合式 (3-88) 和 (3-89) 可知

$$\underline{\sigma}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}) \geq \frac{\omega^2 \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)}}{3\omega^2 + 2 + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{\sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)}}{3 + \frac{2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}. \quad (3-90)$$

其中, $\underline{\sigma}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 表示最小奇异根。因此, 存在常数 $\mu_0 > 0$, 使得

$$\underline{\sigma}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}) \geq \mu_0, \quad s. t. |\omega| \geq \delta. \quad (3-91)$$

给定 α 和 $\gamma \in (0, \gamma^*]$, 根据引理 3-2, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\alpha\lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{P}_\varepsilon) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3-92)$$

所以, 存在 $\varepsilon^* > 0$ 使得, 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ 时, 有

$$\bar{\sigma}(\alpha\lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{P}_\varepsilon) < \frac{\mu_0}{2}, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3-93)$$

其中, $\bar{\sigma}(\alpha\lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{P}_\varepsilon)$ 表示最大奇异值。结合式 (3-91) 和 (3-93), 有

$$\underline{\sigma}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A} - \alpha\lambda_i e^{-j\omega\gamma} \mathbf{P}_\varepsilon) \geq \mu_0 - \frac{\mu_0}{2} > 0, \quad (3-94)$$

$$\forall i \in \mathcal{N}, \varepsilon \in (0, \varepsilon^*], |\omega| \geq \delta.$$

因此, 对于给定 $\gamma^* \geq 0$, 存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\gamma \in (0, \gamma^*]$, 式 (3-84) 在 $|\omega| \geq \delta$ 也成立。即说明在这些条件下, 队列 (3-75) 渐近稳定。 ■

评注 3-22. 对于无时延的车辆队列, 保证渐近稳定性只需要缩放因子 α 满足式 (3-68); 而对于存在时延一致的队列, 还需要低增益因子 ε 足够小, 这种方法被一些研究成为低增益方法 (low gain approach) [119][120]。

评注 3-23. 本定理的控制器设计方法中, 有四个参数 $\alpha, \delta, \mu_0, \varepsilon^*$ 需要顺序地进行设计。首先, 根据信息流拓扑结构的性质, 按照式 (3-77) 确定缩放因子 α ; 其次, 基于缩放因子 α 和时延 γ^* 确定 δ ; 进而确定出 μ_0 ; 最后, 依据 α, δ, μ_0 确定 ε^* 的大小。

3.5 数值仿真分析

本节针对稳定区域分析、稳定裕度分析、改善稳定裕度的方法以及稳定控制器设计四个方面, 依次给出数值仿真结果。领航车辆的加减速行为可认为是队列的一个扰动。

在本节中, 若未作特殊说明, 均作如下假定: 队列匀质, 包括 11 辆车 (1 个领航车辆和 10 个跟随车辆); 车长设为 4 m, 期望车距设为 $d_{i-1,i} = 20$ m; 初始速度误差和位移误差均设为 0; 领航车辆的行驶轨迹假定为

$$v_0 = \begin{cases} 20 \text{ m/s} & t \leq 5 \text{ s} \\ 20 + 2t \text{ m/s} & 5 \text{ s} < t \leq 10 \text{ s} \\ 30 \text{ m/s} & t > 10 \text{ s} \end{cases} \quad (3-95)$$

3.5.1 控制器参数稳定区域仿真

针对图 1-3 中展示的六种典型信息流拓扑结构 (PF, PLF, BD, BDL, TPF, TPLF), 表 3-1 给出相应矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的特征根大小。所有特征根均为正实数, 显然与定理 3-1 的结论相符。

表 3-1 不同信息流拓扑结构对应矩阵 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 的特征根

(a) PF	(b) PLF	(c) BD	(d) BDL	(e) TPF	(f) TPLF
1	1	0.0223	1.0000	1	1
1	2	0.1981	1.0979	2	2
1	2	0.5339	1.3820	2	3
1	2	1.0000	1.8244	2	3
1	2	1.5550	2.3820	2	3
1	2	2.1495	3.0000	2	3
1	2	2.7307	3.6180	2	3
1	2	3.2470	4.1756	2	3
1	2	3.6525	4.6180	2	3
1	2	3.9111	4.9021	2	3

为了验证**定理 3-2**中控制器稳定区域的结论，本节对两种工况进行仿真，即稳定工况和不稳定工况，相应的控制器增益如表 3-2 所示。图 3-4 展示了工况 1 中，不同信息流拓扑结构（图 1-3 中 (a) ~ (f)）下队列跟车误差的变化曲线。

表 3-2 两种仿真工况

增益	工况 1	工况 3
τ	0.5	0.5
k_p	1	1
k_v	2	0.2
k_a	1	1
定理 3-2	符合	不符合

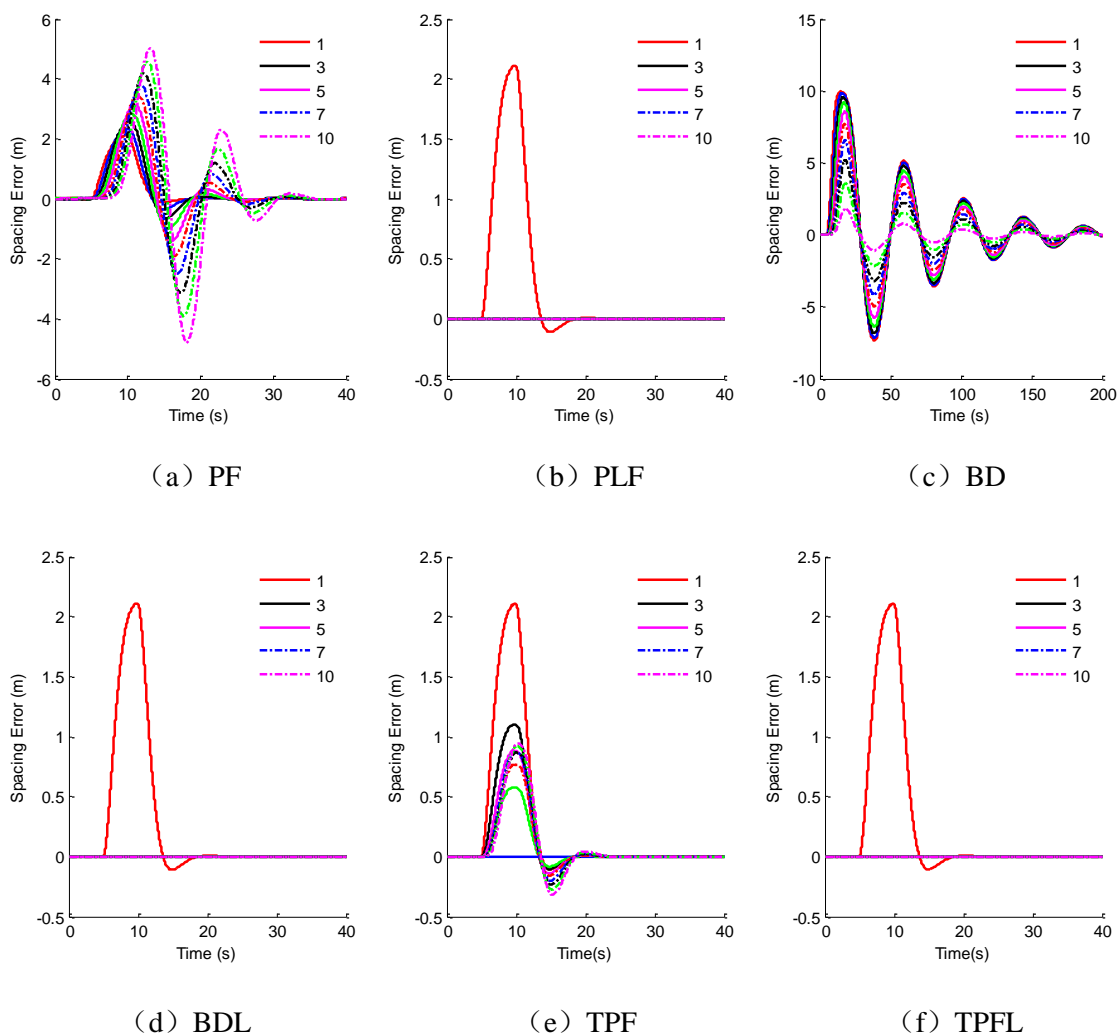


图 3-4 当**定理 3-2**成立时不同信息流拓扑结构下车辆队列的运动

注意到在图 3-4 中, PLF、BDL、TPLF 三种拓扑结构下, 只有第一个跟随车辆的跟车误差非零, 而其他跟随车辆的跟车误差几乎为零。这三种拓扑结构下, 所有跟随车辆均直接被领航车辆牵引, 且队列都假设无初始误差 (包括速度、位移)。在线性控制器 (3-2) 作用下, 所有跟随车辆均有相似的动力学演变规律, 所以相邻车辆的跟车误差接近于零。另一方面, 工况 2 中控制器增益不符合 **定理 3-2** 的稳定区域, 从而所有队列均不是闭环稳定。图 3-5 也展示出车辆队列运动过程中状态发散 (失稳) 的现象。仿真结果与 **定理 3-2** 的描述一致。

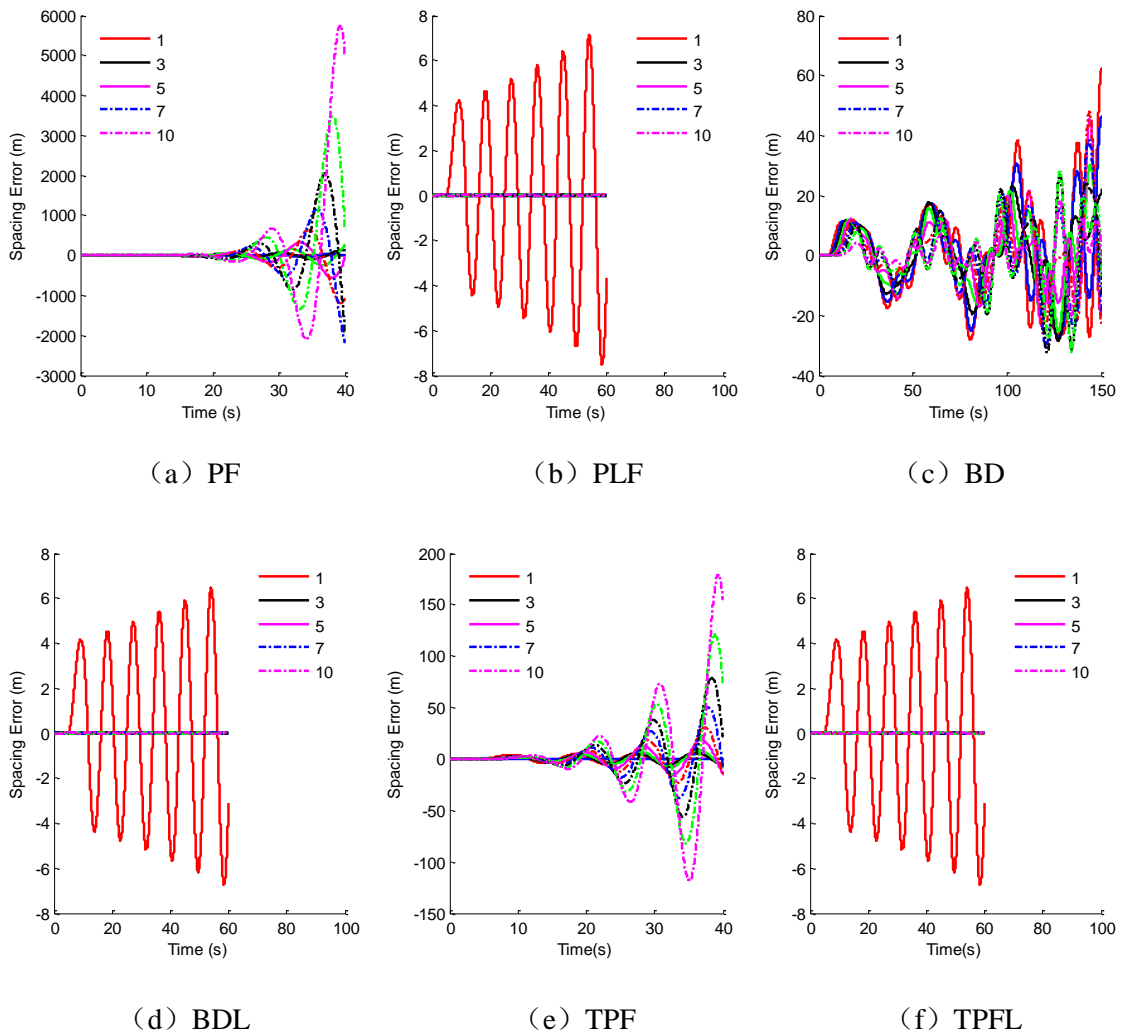


图 3-5 当 **定理 3-2** 不成立时不同信息流拓扑结构下车辆队列的运动

3.5.2 双向拓扑下稳定裕度仿真

首先验证 **引理 3-1** 的结论, 图 3-6 展示多项式 (3-21) 三个根在不同参数 λ 下的数值解。在这组参数下, 即 $k_p = 1, k_v = 2, k_a = 1, \tau = 0.5$, 当 λ 趋向于零时,

一个实特征根以 $O(\lambda)$ 趋向于 $-1/\tau$ ，而另外一对复根的实部同样以 $O(\lambda)$ 趋向于零。这种数值解的现象显然符合引理 3-1 的结论。

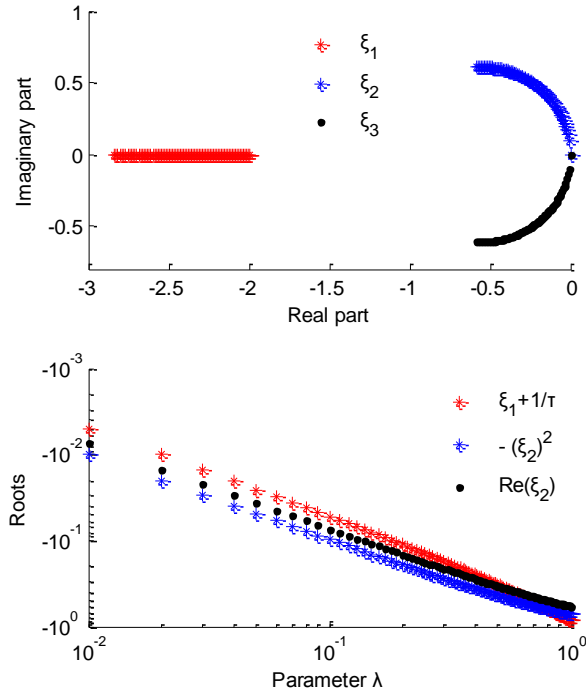


图 3-6 式 (3-21) 的三个根随参数 λ 的变化趋势，其中： $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1, \tau = 0.5$

为验证定理 3-3 的结论，本文计算 BD 拓扑结构下，不同队列规模的 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$ 的变化趋势，以及相应的上下界。计算结果如图 3-7 所示。

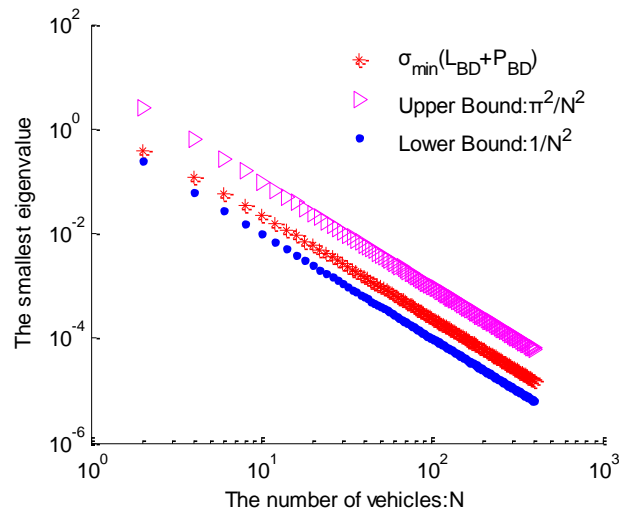


图 3-7 对应于 BD 拓扑结构的 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})$

如图 3-7 所示，可以发现**定理 3-3**中给出的上下界非常准确。图 3-8 展示不同队列规模下，对应于 BDL 拓扑结构的 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$ 和 $\sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$ 的变化趋势。显然，这一结果符合**定理 3-3**对于 BDL 拓扑结构的叙述。

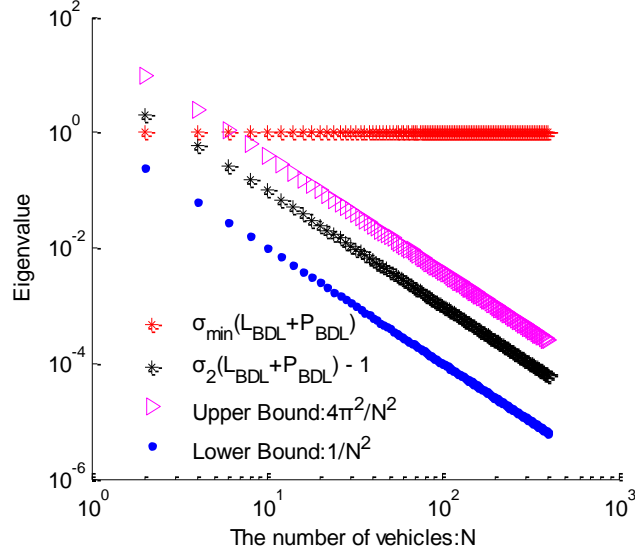


图 3-8 对应于 BDL 拓扑结构的 $\sigma_{\min}(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$ 和 $\sigma_2(\mathcal{L}_{\text{BDL}} + \mathcal{P}_{\text{BDL}})$

3.5.3 稳定裕度的改进方法仿真

本小节展示不同 UIF 拓扑结构下，队列的稳定裕度以及其瞬态性能。瞬态性能指，领航车辆速度由一个稳态变到另外一个稳态时，在这个瞬态过程中跟随车辆的跟车误差变化情况。根据文献[83]，本文中的瞬态性能主要由式 (3-96)、式 (3-97)、及式 (3-98) 体现。

本小节的控制器增益为 $k_p = 1, k_v = 2, k_a = 1$ 。

定义 3-4: 全局瞬态性能指标 (global transient performance index)

$$E_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^T \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i-1})^T \mathbf{R} (\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}), \quad (3-96)$$

其中， $\mathbf{R} = \text{diag}\{k_p, k_v, k_a\}$ 表示将控制增益作为权重因子。

E_g 可以反映瞬态过程中全局的跟踪性能。同时，本节也定义局部瞬态性能指标，该指标不考虑相对于领航车辆的跟踪误差，而只考虑跟随车辆之间的跟踪误差。

定义 3-5: 局部瞬态性能指标 (local transient performance index)

$$E_l = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \int_0^T \frac{1}{2} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^T \mathbf{R} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}). \quad (3-97)$$

为了表征收敛速度，即跟踪误差衰减到足够小时所需的时间，本节还定义一个收敛性能指标。

定义 3-6: 收敛性能指标 (convergence performance index)

$$T_c = \min_{T_1} \left(\max_{i=\{1, \dots, N\}, t > T_1} |\varepsilon_{s,i}| < \delta \right). \quad (3-98)$$

其中， $\varepsilon_{s,i} = p_{i-1} - p_i - d_{i-1,i}$ 。

在数值仿真中，式 (3-96) 和式 (3-97) 中的参数 T 需要设置的足够大，以使得所有跟踪误差均已衰减（本节的仿真计算中， $T = 2 \times 10^3$ s）。同时，式 (3-98) 中 δ 设为 $\delta = 0.1$ m。

3.5.3.1 信息流拓扑结构选取的仿真

为了展示树的深度 c 和局部通信范围 h 对队列 (3-38) 稳定裕度的影响，将队列规模固定为 $N = 50$ 。如图 3-9 所示，可以发现：决定稳定裕度变化趋势是树深度 c ，而不是局部通信范围 h 。即使跟随车辆中的信息流拓扑结构为强连通（即，本工况下 $h = 49$ ），若没有足够的跟随车辆被领航车辆所牵引（即，小树深 c ），那么稳定裕度依然会接近于零。这一仿真现象与 **定理 3-4** 中的结论 2 相符。

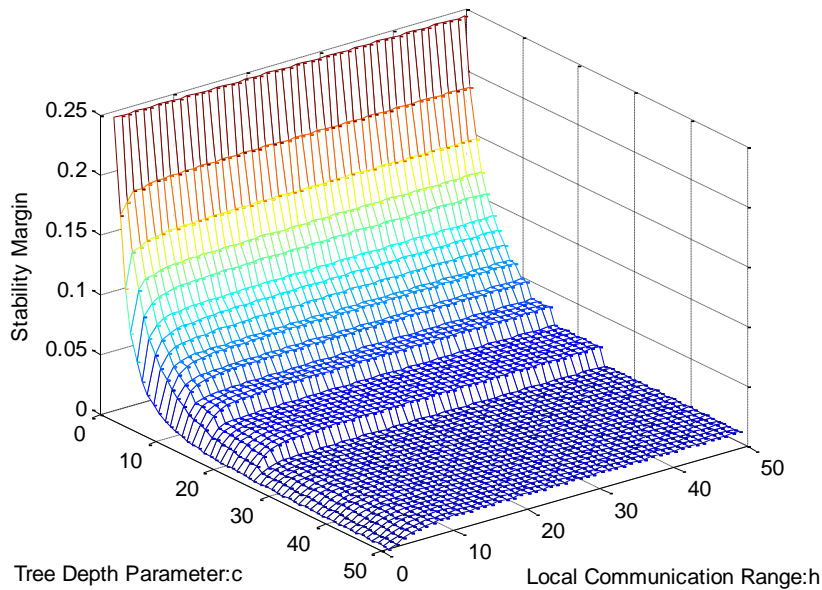


图 3-9 UIF 结构下不同树深度 c 和局部通信范围 h 时队列的稳定裕度

对于具有两种不同树深度的强连通 UIF 拓扑结构(一个树深为常值,即 $c = 4$; 另一个与队列规模同阶,即 $c = N$), 为了展示不同性能指标随队列规模的变化趋势, 我们将队列规模 N 从 4 逐渐增加到 50。如图 3-10 所示, 在所有工况的瞬态过程中, 跟随车辆之间的跟踪性能(即图 3-10 中 E_l) 均非常好, 局部性能指标均接近于 0。实际上, 在仿真中也发现在这类队列中, 所有跟随车辆看起来像一个加长的车辆, 去跟踪领航车辆的轨迹; 这意味着强连通的拓扑结构, 可以很好的调节跟随车辆之间的跟车误差。然而, 如果只有第一辆车能够获取领航车辆的信息(即树深 $c = N$), 此时全局瞬态性能指标 E_g 随队列规模变大而逐渐变差。在仿真中发现, 第一个跟随车辆的跟车误差随着队列规模增大而出现大震荡现象, 且收敛速度变慢; 这意味着跟随车辆之间的信息流有利于调节局部的行为(有利于局部安全性), 但对队列的延展性(scalability)却没有促进作用。此时, 若每四个跟随车辆中就有一个能够获取领航车辆的信息(即树深为 $c = 4$), 则这些性能指标(E_g, E_l, T_c) 都会显著变好。图 3-11 证实评注 3-15 中的叙述, 即便能够获取领航车辆状态信息的跟随车辆个数为 $\Omega(N) = O(N)$, 队列的稳定裕度依然会随其规模的增大而衰减到零。图 3-10 和图 3-11 的仿真结构均表明, 在 UIF 结构中保持一个定常树深的性质, 队列的可扩展性可以得到保证。

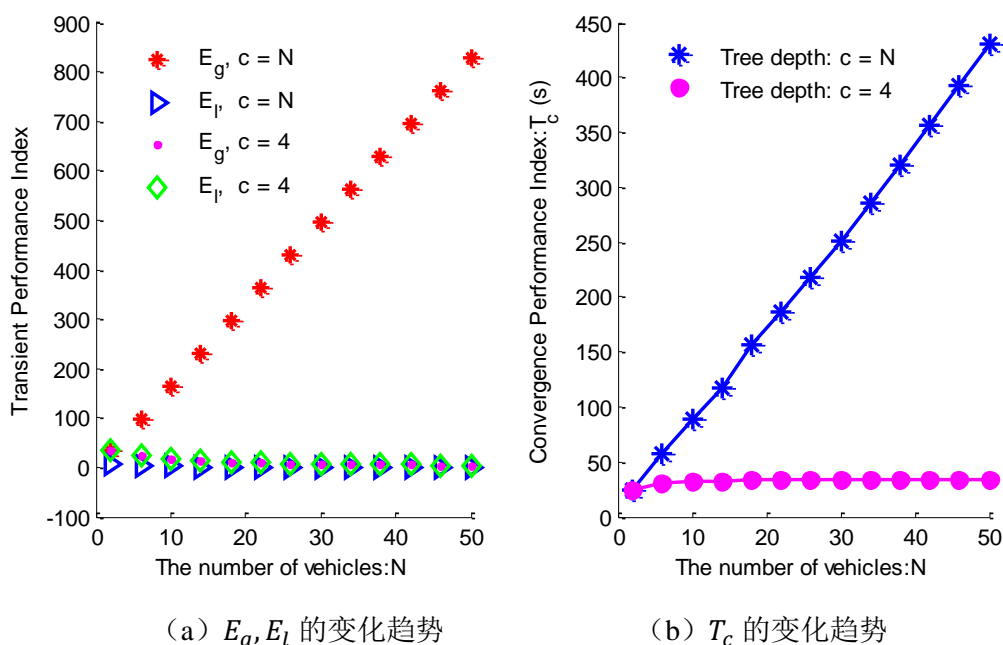


图 3-10 具有两种不同树深度的强连通 UIF 拓扑结构下, 队列性能指标的变化趋势

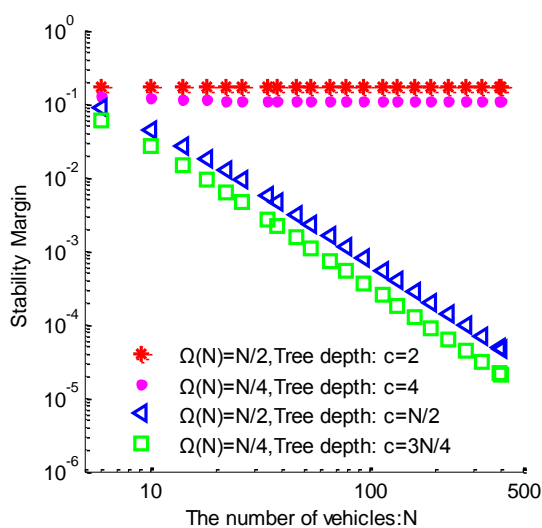


图 3-11 具有两种不同树深度的强连通 UIF 拓扑结构下，队列的稳定裕度变化趋势

3.5.3.2 非对称控制器设计的仿真

如图 3-12 所示，BD 结构下，使用非对称控制器时，队列的稳定裕度确实一直远离零点，且与队列规模无关；这一现象与定理 3-5 的结论相符。为了展示 BD 结构下，不同非对称度（即， $\epsilon = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ ）对队列性能指标的影响，我们将队列规模由 2 逐渐变到 30。如图 3-13 所示，对称控制下队列（即 $\epsilon = 0$ ）的收敛时间，随着队列规模的增大而变长；而非对称控制下的队列，其收敛时间随队列规模的增大上升很小。然而，在瞬态调整过程中，非对称控制也会使得跟车误差出现较大的峰值现象，这不利于车辆的安全性。

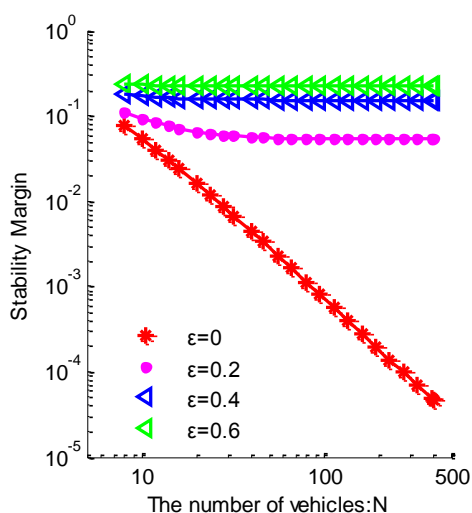
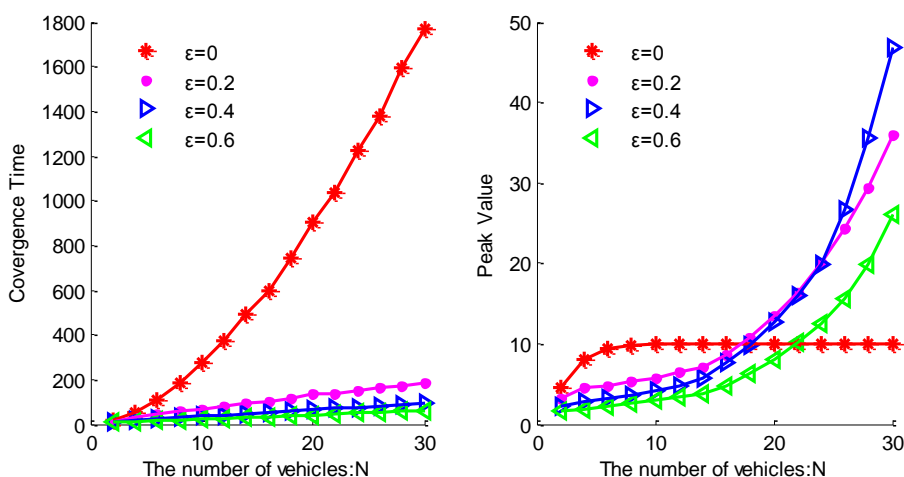


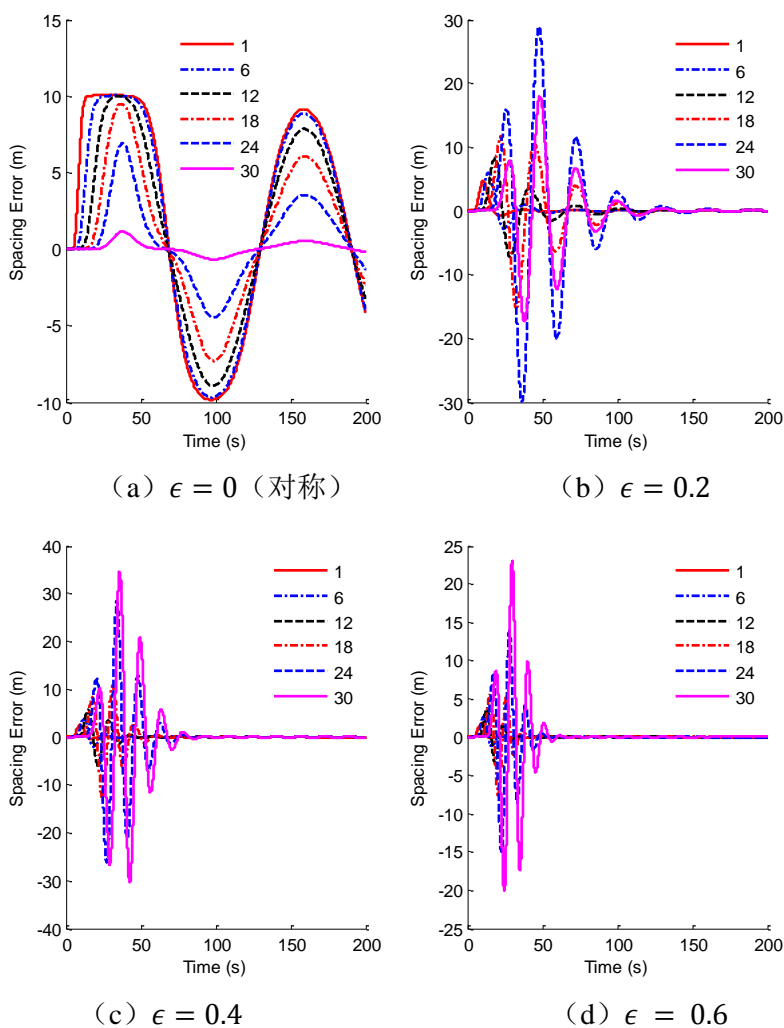
图 3-12 BD 结构下具有不同对称度的队列稳定裕度



(a) 收敛速度

(b) 瞬态过程的跟车误差峰值

图 3-13 BD 结构下对称控制器和非对称控制器下的队列性能



(a) $\epsilon = 0$ (对称)

(b) $\epsilon = 0.2$

(c) $\epsilon = 0.4$

(d) $\epsilon = 0.6$

图 3-14 BD 结构下对称控制器和非对称控制器下队列的跟车误差变化趋势

图 3-14 展示不同非对称度下车辆队列中跟车误差的变化情况。该仿真中假设跟随车辆个数为 $N = 30$ 。可以发现,非对称度有利于改善稳定性和提高收敛速度。但是,非对称控制确实导致瞬态调整过程中跟车误差出现了较大的峰值,这对于局部车辆安全是不好的,容易发生追尾事故。稳定裕度只是刻画了稳定性能,以及对初始误差的衰减速度,并不能保证瞬态过程中的性能。即使非对称控制可以使得稳定裕度远离零点,对于实际的系统而言,依然需要考虑瞬态的性能。如何权衡这两种性能,还需要进一步的研究。

3.5.4 稳定性控制器设计的仿真

根据**定理 3-6**,当系统不存在时延,即 $\gamma = 0$ 时,缩放因子 α 应该满足式(3-68),低增益因子 ε 可以是任何正实数。表 3-3 展示控制器设计的参数,这些参数符合**定理 3-6**的要求。如图 3-15 所示,在所有六种典型信息流拓扑结构下,车辆队列的运动均是稳定的。这与**定理 3-6**相符。

表 3-3 无时延时控制器设计的参数

拓扑结构	λ_{\min}	α	ε
PF	1	0.5	1
PLF	1	0.5	1
BD	0.022	22.5	1
BDL	1	0.5	1
TPF	1	0.5	1
TPLF	1	0.5	1

根据**定理 3-7**,当系统存在时延,即 $\gamma > 0$ 时,需要顺序的设计四个参数(即 $\alpha, \delta, \mu_0, \varepsilon^*$),从而计算出稳定的控制器增益。仿真过程,假设时延为 $\gamma = 0.5 \text{ s}$ 。表 3-4 展示了控制器设计的参数,这些参数符合**定理 3-7**的要求。如图 3-16 所示,在所有六种典型信息流拓扑结构下,队列系统的运动均是稳定的。这一仿真与**定理 3-7**的结果相符。

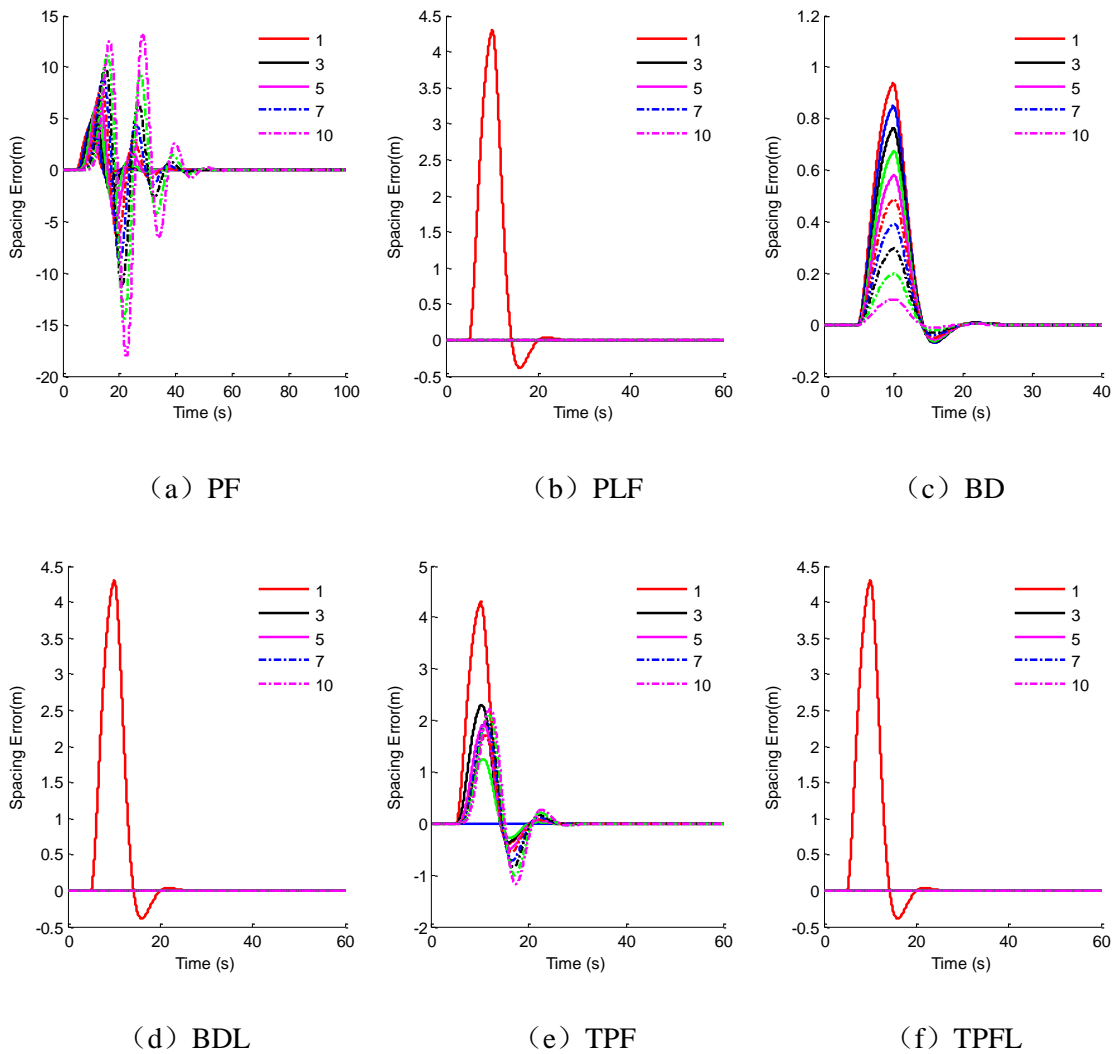


图 3-15 无延时不同信息流拓扑结构下车辆队列的运动

表 3-4 时延一致控制器设计的参数

拓扑结构	λ_{\min}	λ_{\max}	α	δ	μ_0	ε
PF	1	1	1	2	0.63	6.1×10^{-4}
PLF	1	2	1	2	0.63	3.8×10^{-5}
BD	0.022	3.91	45	2	0.63	5.7×10^{-13}
BDL	1	4.90	1	2	0.63	1.2×10^{-6}
TPF	1	2	1	2	0.63	3.8×10^{-5}
TPLF	1	3	1	2	0.63	9.5×10^{-6}

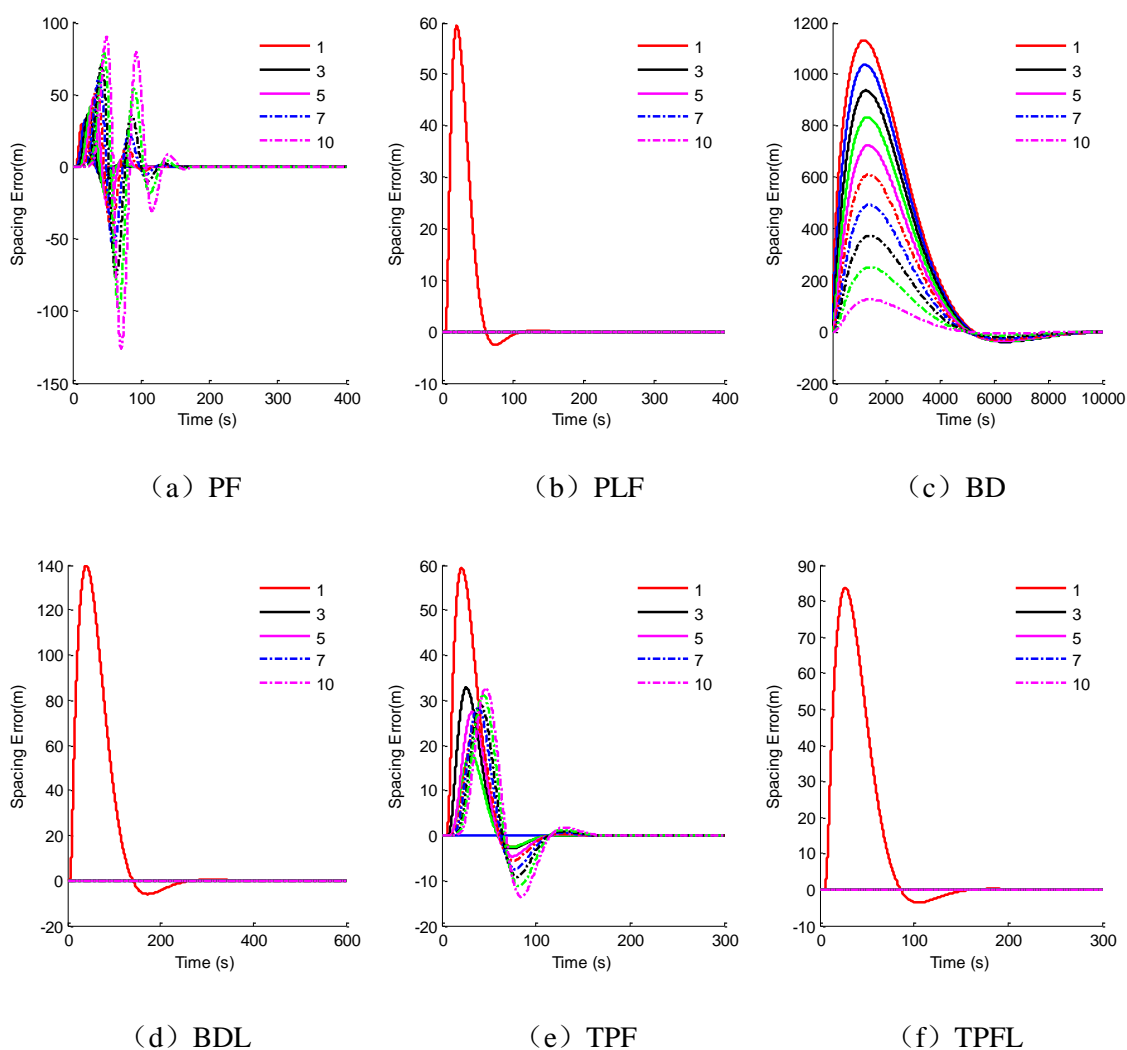


图 3-16 时延一致时不同信息流拓扑结构下车辆队列的运动

3.6 本章小结

基于所提出的四元素建模构架，以线性匀质队列为对象，采用矩阵因子分解、Routh–Hurwitz 稳定性判据、Rayleigh-Ritz 定理、Riccati 方程等技术分析了队列闭环稳定性问题。依次讨论了线性控制器增益的稳定区域、双向结构下的稳定裕度、改善稳定裕度的方法、基于子系统的稳定控制器增益设计。结论如下：

(1) 采用矩阵因子分解技术，线性匀质队列整体的闭环稳定性可以等价地转化为多个小规模子系统的稳定性。从而，只需分析子系统的稳定性能，便可以得到队列整体的稳定性能，这避免了直接分析高维矩阵的困难。

(2) 通过 Routh–Hurwitz 稳定性判据，解析地得到了一类信息流拓扑结构下匀质队列线性控制器增益的稳定区域，信息流拓扑结构对稳定区域的影响体现在

所对应 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 矩阵特征根上。此外，对于 **BD** 结构下的车辆队列，其稳定裕度随队列规模增加以 $O(1/N^2)$ 速度衰减，而 **BDL** 结构下的队列稳定裕度与规模无关。

(3) 通过选择具有定常树深的无向信息流拓扑结构，或者采用非对称性控制，均可得到队列无关的稳定裕度。但拓扑结构的选择会产生大量通信需求，而非对称性控制则会在瞬态过程中出现大峰值现象，这之间的权衡需要进一步讨论。

(4) 针对局部子系统的 **Riccati** 方程求解，可以得到稳定的控制器增益，且计算量仅和节点动力学维数相同，与队列规模无关。该方法不仅能保证无时延匀质队列的闭环稳定性，在一定条件下也能保证时延一致下匀质队列的闭环稳定性。

第4章 线性匀质队列的鲁棒性能分析

车辆队列中不可避免地会出现扰动和噪声，比如路面坡度和风阻的影响可视为节点的一种扰动，传感器的测量误差可视为队列中的噪声。为此，本章研究有限能量扰工况下线性匀质队列的鲁棒性能，包括 1) 队首扰动到队尾输出的增益和 2) 整体扰动到整体输出的增益。首先，建立扰动工况下的队列闭环动力学模型，包括时域模型和频域模型；然后，分析相应传递函数的无穷范数，讨论单向级联和双向拓扑结构下匀质队列的鲁棒性能；最后，仿真结果验证了理论分析的正确性。

4.1 扰动工况的队列动力学建模

4.1.1 队列动力学的时域模型构建

假设队列匀质，且队列构型为恒定距离型。队列中共有 $N + 1$ 个车辆，其中队首的领航车辆标号为 0，跟随车辆编号依次为 $1 \sim N$ 。单个节点的状态向量为 $\mathbf{x}_i = [p_i, v_i, a_i]^T$ ，分别表示第 i 辆车的位移、速度和加速度。根据反馈线性化过程，节点的动力学建模为

$$\tau \dot{a}_i + a_i = u_i + w_i. \quad (4-1)$$

其中， u_i 为控制输入， w_i 为外界干扰。本文假设干扰的能量有界 (finite energy)，即 $\|w_i(t)\|_{L_2} = \int_0^{+\infty} (w_i(t))^2 dt < \infty$ 。

则单个节点的动力学描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_1 u_i(t) + \mathbf{B}_2 w_i(t) \quad (4-2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}.$$

同样，采用有向图 $\mathcal{G}_N = \{\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N\}$ 和增广有向图 $\mathcal{G}_{N+1} = \{\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}\}$ 描述信息流拓扑结构；采用邻接矩阵 \mathcal{A}_N 、拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 、和牵引矩阵 \mathcal{P} 刻画信息流拓扑结构的性质。

不考虑通信时延，假定控制器为线性匀质，则控制器的形式为

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathbb{I}_i} \left[k_p (p_i(t) - p_j(t) - d_{i,j}) + k_v (v_i(t) - v_j(t)) + k_a (a_i(t) - a_j(t)) \right]. \quad (4-3)$$

根据第2章中四元素模型构建过程, 可知线性匀质队列的闭环动力学方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{W}, \quad (4-4)$$

其中, \mathbf{X} 为队列的 N 个跟随车辆的集总状态向量, 其定义为式 (2-41); 外界扰动向量为 $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$; $\mathbf{B} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2$; \mathbf{A}_c 为系统闭环特征矩阵

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T, \quad (4-5)$$

其中, $\mathbf{k} = [k_p, k_v, k_a]^T$ 为控制器增益。

方便讨论, 定义队列中输出为各个节点的位移偏差 $\mathbf{Y} = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, 其中 \tilde{p}_i 为相对于领航车辆的位移偏差, 即

$$\tilde{p}_i(t) = p_i(t) - p_0(t) - d_{0,i}, \quad (4-6)$$

有

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}, \quad (4-7)$$

其中, $\mathbf{C} = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_1 = [1, 0, 0]$ 。

4.1.2 队列动力学的频域模型构建

式 (4-4) 给出扰动工况下队列的时域动力学描述。为方便地讨论扰动 \mathbf{W} 对队列位移偏差 \mathbf{Y} 的影响, 本节进一步将式 (4-4) 转化到频域下的表达式。

假设零初始状态, 根据式 (4-4), 由扰动 \mathbf{W} 到位移偏差 \mathbf{Y} 的传递函数为

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{Y})}{\mathcal{L}(\mathbf{W})} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}. \quad (4-8)$$

其中, $\mathcal{L}(\mathbf{Y})$ 为变量 \mathbf{Y} 的拉普拉斯变换, s 为复变量。式 (4-8) 中的逆矩阵并不容易直接计算, 下面进一步推导 $G(s)$ 的表达。

对式 (4-4) 取拉普拉斯变换有

$$s\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T\} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{X}) + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2 \cdot \mathcal{L}(\mathbf{W}). \quad (4-9)$$

整理得到

$$\{\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{I}_3 s - \mathbf{A}) + (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \mathbf{B}_1 \mathbf{k}^T\} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2 \cdot \mathcal{L}(\mathbf{W}). \quad (4-10)$$

易知,

$$\mathcal{L}(X) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_3 \cdot \mathcal{L}(Y). \quad (4-11)$$

其中, $\mathbf{B}_3 = [1, s, s^2]^T$ 。将式 (4-11) 代入 (4-10) 中, 同时考虑 Kronecker 积的性质, 得到

$$\{\mathbf{I}_N \otimes [(I_3 s - \mathbf{A})\mathbf{B}_3] + (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes (\mathbf{B}k^T \mathbf{B}_3)\} \cdot \mathcal{L}(Y) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_2 \cdot \mathcal{L}(W). \quad (4-12)$$

即

$$\left\{ \mathbf{I}_N \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s^3 + \frac{1}{\tau} s^2 \end{bmatrix} + (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} (k_p + k_v s + k_a s^2) \end{bmatrix} \right\} \cdot \mathcal{L}(Y) = \mathbf{I}_N \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \cdot \mathcal{L}(W). \quad (4-13)$$

所以,

$$[\mathbf{I}_N \otimes (\tau s^3 + s^2) + (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes (k_p + k_v s + k_a s^2)] \cdot \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(W). \quad (4-14)$$

从而, 得到

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}(Y)}{\mathcal{L}(W)} = [\mathbf{I}_N \otimes (\tau s^3 + s^2) + (\mathcal{L} + \mathcal{P}) \otimes (k_p + k_v s + k_a s^2)]^{-1}. \quad (4-15)$$

式 (4-15) 即为频域下, 扰动 W 到位移偏差 Y 的传递函数。

4.1.3 鲁棒性能指标定义

本章讨论在有限能量干扰 W 对队列位移偏差 Y 的影响。主要讨论两种工况,

- 1) 作用在第一个节点处的扰动 w_1 , 对最后一个节点位移偏差 \tilde{p}_N 的影响;
- 2) 作用在所有节点处的扰动 $W = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$, 对所有节点位移偏差 $Y = [\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_N]^T$ 的影响。

对应于上述两种工况, 定义如下两个性能指标^[83]:

定义 4-1: 首车扰动到末车位移偏差输出的增益因子 (first-to-last amplification factor), 定义为

$$AF_{f2l} = \sup \frac{\|\tilde{p}_N\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w_1\|_{\mathcal{L}_2}}. \quad (4-16)$$

扰动向量 W 对位移偏差 Y 输出的增益因子 (all-to-all amplification factor), 定义为

$$AF_{a2a} = \sup \frac{\|Y\|_{\mathcal{L}_2}}{\|W\|_{\mathcal{L}_2}}. \quad (4-17)$$

式 (4-16) 和 (4-17) 体现了车辆队列对有限能量扰动的抑制效果。根据附录中 B.1 函数范数, 上述两式可通过相应传递函数的 \mathcal{H}_∞ 范数进行计算, 即

$$AF_{f2l} = \|G_{f2l}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |G_{f2l}(j\omega)|. \quad (4-18)$$

$$AF_{a2a} = \|G(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} [\sigma_{\max}(G(j\omega))]. \quad (4-19)$$

其中, $G_{f2l}(s)$ 为扰动 w_1 到 \tilde{p}_N 的传递函数。

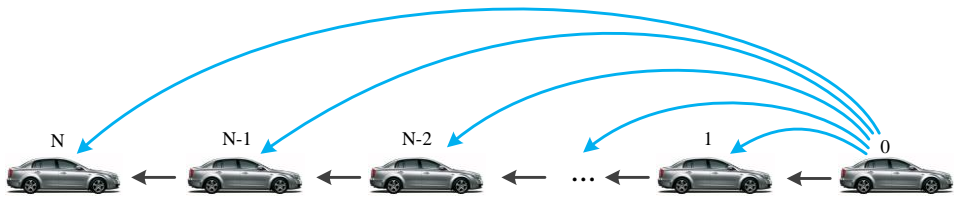
理论上而言, 对于任意信息流拓扑结构, 若都能解析地分析式 (4-18) 和 (4-19), 则均可以解析地讨论本章定义的鲁棒性能指标。然而, 在一般信息流拓扑结构下, 难以解析地分析式 (4-18) 和 (4-19)。下面针对常见的拓扑结构, 即单向级联和双向拓扑结构, 分析式 (4-18) 和 (4-19) 的大小。

4.2 单向级联拓扑结构下队列的鲁棒性能分析

如图 4-1 所示, 本节针对单向级联拓扑结构下的车辆队列, 讨论鲁棒性能式 (4-18) 和式 (4-19) 的变化趋势。



(a) 前车跟随式拓扑结构



(b) 领航者-前车跟随式拓扑结构

图 4-1 单向级联结构

4.2.1 前车跟随式结构

前车跟随式 (predecessor-following, PF) 结构中, 单个跟随车辆只能获取前方一辆车的状态信息。根据第 2 章的描述, 可知

$$\mathcal{L}_{\text{PF}} + \mathcal{P}_{\text{PF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-20)$$

其中, $\mathcal{L}_{\text{PF}}, \mathcal{P}_{\text{PF}}$ 分别为对应于 PF 结构的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵。所以,

$$[G_{\text{PF}}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} a(s) & & & \\ -b(s) & a(s) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -b(s) & a(s) \end{bmatrix}. \quad (4-21)$$

其中, $a(s) = \tau s^3 + (1 + k_a)s^2 + k_v s + k_p, b(s) = k_p + k_v s + k_a s^2$ 。所以, 对于 PF 结构下的队列, 可以解析得到扰动 \mathbf{W} 到位移偏差输出 \mathbf{Y} 的传递函数, 如下

$$G_{\text{PF}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{a(s)} & & & \\ \frac{b(s)}{a^2(s)} & \frac{1}{a(s)} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{b^{N-1}(s)}{a^N(s)} & \dots & \frac{b(s)}{a^2(s)} & \frac{1}{a(s)} \end{bmatrix}. \quad (4-22)$$

记

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{1}{a(s)} = \frac{1}{\tau s^3 + (1 + k_a)s^2 + k_v s + k_p}, \\ T(s) &= \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{k_a s^2 + k_v s + k_p}{\tau s^3 + (1 + k_a)s^2 + k_v s + k_p}. \end{aligned} \quad (4-23)$$

则式 (4-22) 可以写为

$$G_{\text{PF}}(s) = \begin{bmatrix} M(s) & & & \\ M(s)T(s) & M(s) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ M(s)T^{N-1}(s) & \dots & M(s)T(s) & M(s) \end{bmatrix}. \quad (4-24)$$

从而, 任意扰动 $w_j(t)$ 到任意车辆位移偏差输出 $\tilde{p}_i(t)$ 的传递函数为

$$g_{ij}(s) = \begin{cases} M(s)T^{i-j}(s), & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (4-25)$$

式 (4-25) 反映了后车的扰动 $w_j(t)$ 到前车位移偏差输出 $\tilde{p}_i(t)$ ($j > i$) 没有影响, 原因在于 PF 结构下的信息流是单向且向后传递。特殊地, 第一个节点输入扰动 $w_1(t)$ 对最后一个节点位移偏差 $\tilde{p}_N(t)$ 的传递函数为

$$G_{f2l}(s) = g_{N1}(s) = M(s)T^{N-1}(s). \quad (4-26)$$

下面的定理给出了 PF 结构队列的增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 随规模的变化趋势。

定理 4-1: 给定扰动工况下的匀质队列，其动力学由式 (4-4) 描述，控制增益满足式 (3-12)。则增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 满足

$$\beta_1 \alpha^{N-1} \leq AF_{f2l} \leq \beta_2 \alpha^{N-1}, \quad (4-27)$$

$$\beta_1 \alpha^{N-1} \leq AF_{a2a} \leq \frac{\beta_2 (\alpha^N - 1)}{\alpha - 1}. \quad (4-28)$$

其中， $\alpha = |T(j\omega_T)| > 1$ ， $\beta_1 = |M(j\omega_T)|$ ， $\beta_2 = |M(j\omega_M)|$ ， ω_T 和 ω_M 分别为传递函数 $T(s)$, $M(s)$ 的峰值频率。

证明: 首先，证明满足式 (3-12) 情况下， $\forall k_p, k_v, k_a$ ， $\exists \omega_0 > 0$ ，当 $s = j\omega_0$ 时， $|T(j\omega_0)| > 1$ 。根据式 (4-23) 知

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{(k_p - k_a \omega^2)^2 + (k_v \omega)^2}{[k_p - (1 + k_a) \omega^2]^2 + (k_v \omega - \tau \omega^3)^2} = \frac{\phi}{\psi}. \quad (4-29)$$

其中，

$$\phi = k_a^2 \omega^4 + (k_v^2 - 2k_p k_a) \omega^2 + k_p^2, \quad (4-30)$$

$$\psi = \tau^2 \omega^6 + [(1 + k_a)^2 - 2\tau k_v] \omega^4 + [k_v^2 - 2(1 + k_a)k_p] \omega^2 + k_p^2.$$

所以有

$$\begin{aligned} \psi - \phi &= \tau^2 \omega^6 + [(1 + k_a)^2 - 2\tau k_v] \omega^4 + [k_v^2 - 2(1 + k_a)k_p] \omega^2 + k_p^2 \\ &\quad - [k_a^2 \omega^4 + (k_v^2 - 2k_p k_a) \omega^2 + k_p^2] \\ &= \tau^2 \omega^6 + (2k_a - 2\tau k_v + 1) \omega^4 - 2k_p \omega^2. \end{aligned} \quad (4-31)$$

根据式 (4-31)，且 $2k_p > 0$ ，故 $\exists \omega_0 > 0$ ，有 $\psi - \phi < 0$ ，此时 $|T(j\omega_0)|^2 > 1$ 。即说明，任意给定满足式 (3-12) 的控制器增益，均有

$$\alpha = |T(j\omega_T)| > 1, \quad (4-32)$$

其中， ω_T 为 $T(s)$ 的峰值频率。设 ω_M 为 $M(s)$ 的峰值频率，记 $\beta_1 = |M(j\omega_T)|$ ， $\beta_2 = |M(j\omega_M)|$ ，则有

$$\beta_1 \alpha^{N-1} \leq AF_{f2l} = \|M(s)T^{N-1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \beta_2 \alpha^{N-1}. \quad (4-33)$$

接下来，证明式 (4-28) 成立。根据式 (4-19)，根据矩阵最大奇异值定义，

$$AF_{a2a} = \sup_{\omega} [\sigma_{\max}(G_{\text{PF}}(j\omega))] = \sup_{\omega} \sqrt{\rho(G_{\text{PF}}^*(j\omega)G_{\text{PF}}(j\omega))}. \quad (4-34)$$

此外, 根据附录中引理 A-6, 对于任意的矩阵 \mathbf{A} , 其谱半径 $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|_1$, 其中 $\|\mathbf{A}\|_1$ 为矩阵诱导 L_1 范数。同时, 注意到 $\|\mathbf{A}^*\|_1 = \|\mathbf{A}\|_{\infty}$, 所以有

$$\begin{aligned} AF_{a2a} &= \sup_{\omega} \sqrt{\rho(G_{\text{PF}}^*(j\omega)G_{\text{PF}}(j\omega))} \leq \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}^*(j\omega)G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1} \\ &\leq \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}^*(j\omega)\|_1 \|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1} \\ &= \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_{\infty} \|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1} \\ &\leq \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_{\infty}} \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1}. \end{aligned} \quad (4-35)$$

根据矩阵诱导范数的定义, 结合式 (4-24) 有

$$\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |(G_{\text{PF}})_{ij}(j\omega)| = \sum_{i=1}^n |M(j\omega)T^{i-1}(j\omega)|. \quad (4-36)$$

且易知

$$\sup_{\omega} |M(j\omega)T^{i-1}(j\omega)| \leq \sup_{\omega} |M(j\omega)| \cdot \sup_{\omega} |T^{i-1}(j\omega)| \leq \beta_2 \alpha^{i-1}. \quad (4-37)$$

所以

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1} &= \sup_{\omega} \sum_{i=1}^n |M(j\omega)| |T^{i-1}(j\omega)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \beta_2 \alpha^{i-1} = \beta_2 \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1}. \end{aligned} \quad (4-38)$$

同理, 可计算出

$$\sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_{\infty}} \leq \beta_2 \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1}. \quad (4-39)$$

根据式 (4-35) 可知

$$AF_{a2a} \leq \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_{\infty}} \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_1} \leq \beta_2 \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1}. \quad (4-40)$$

根据附录引理 A-6, 有

$$\begin{aligned}
 AF_{a2a} &= \sup_{\omega} \|G_{\text{PF}}(j\omega)\|_2 \geq \sup_{\omega} \left(\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |(G_{\text{PF}})_{ij}(j\omega)| \right) \\
 &\geq \sup_{\omega} (|g_{N1}(j\omega)|) \geq \beta_1 \alpha^{N-1}.
 \end{aligned} \tag{4-41}$$

结合式 (4-40) 和 (4-41), 得到

$$\beta_1 \alpha^{N-1} \leq AF_{a2a} \leq \frac{\beta_2 (\alpha^N - 1)}{\alpha - 1}. \tag{4-42}$$

■

4.2.2 领航者-前车跟随式结构

领航者-前车跟随式 (predecessor-leader following, PLF) 结构中, 单个跟随车辆能获取前方一辆车以及领航车辆的状态信息。根据第 2 章的描述, 可知

$$\mathcal{L}_{\text{PLF}} + \mathcal{P}_{\text{PLF}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4-43}$$

其中, $\mathcal{L}_{\text{PLF}}, \mathcal{P}_{\text{PLF}}$ 分别为对应于 PLF 结构的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵。根据上一小节的推导, 在 PLF 结构下, 扰动 \mathbf{W} 到位移偏差输出 \mathbf{Y} 的传递函数为

$$G_{\text{PLF}}(s) = \begin{bmatrix} M & & & & \\ MT_1 & M_1 & & & \\ MT_1^2 & M_1 T_1 & M_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ MT_1^{N-1} & M_1 T_1^{N-2} & \cdots & M_1 T_1 & M_1 \end{bmatrix}. \tag{4-44}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 M_1(s) &= \frac{1}{\tau s^3 + (1 + 2k_a)s^2 + 2k_v s + 2k_p}, \\
 T_1(s) &= \frac{k_a s^2 + k_v s + k_p}{\tau s^3 + (1 + 2k_a)s^2 + 2k_v s + 2k_p}.
 \end{aligned} \tag{4-45}$$

定理 4-2: 给定存在扰动下的匀质队列, 其动力学由式 (4-4) 描述, 控制增益满足式 (3-12), 且满足

$$\begin{cases} 3k_a^2 + 4k_a - 4\tau k_v + 1 \geq 0 \\ 3k_v^2 - 6k_p k_a - 8k_p \geq 0 \end{cases} \tag{4-46}$$

则增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 满足

$$\gamma_1 \alpha_1^{N-1} \leq AF_{f2l} \leq \beta_2 \alpha_1^{N-1}, \quad (4-47)$$

$$\gamma_2 \leq AF_{a2a} \leq \gamma_2 \frac{\alpha_1^N - 1}{\alpha_1 - 1}. \quad (4-48)$$

其中, $\alpha_1 = |T_1(j\omega_{T_1})| < 1$, $\gamma_1 = |M(j\omega_{T_1})|$, ω_{T_1} 为传递函数 $T_1(s)$ 的峰值频率, ω_{M_1} 为传递函数 $M_1(s)$ 的峰值频率, 取 $\gamma_2 = \max\{|M(j\omega_M)|, |M_1(j\omega_{M_1})|\}$ 。

证明: 首先, 证明满足式 (4-46) 时, $\|T_1(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ 。根据式 (4-45) 知

$$|T_1(j\omega)|^2 = \frac{(k_p - k_a \omega^2)^2 + (k_v \omega)^2}{[2k_p - (1 + 2k_a)\omega^2]^2 + (2k_v \omega - \tau \omega^3)^2} = \frac{\phi_1}{\psi_1}. \quad (4-49)$$

其中,

$$\phi_1 = k_a^2 \omega^4 + (k_v^2 - 2k_p k_a) \omega^2 + k_p^2, \quad (4-50)$$

$$\psi_1 = \tau^2 \omega^6 + [(1 + 2k_a)^2 - 4\tau k_v] \omega^4 + 4[k_v^2 - (1 + 2k_a)k_p] \omega^2 + 4k_p^2$$

所以有

$$\begin{aligned} \psi_1 - \phi_1 &= \tau^2 \omega^6 + [(1 + 2k_a)^2 - 4\tau k_v] \omega^4 + 4[k_v^2 - 2(1 + k_a)k_p] \omega^2 \\ &\quad + 4k_p^2 - [k_a^2 \omega^4 + (k_v^2 - 2k_p k_a) \omega^2 + k_p^2] \\ &= \tau^2 \omega^6 + (3k_a^2 + 4k_a - 4\tau k_v + 1) \omega^4 \\ &\quad + (3k_v^2 - 6k_p k_a - 8k_p) \omega^2 + 3k_p^2 \end{aligned} \quad (4-51)$$

根据式 (4-51), 当控制器增益满足式 (4-46) 时, $\forall \omega, \psi_1 - \phi_1 > 0$, 所以 $|T_1(j\omega)| < 1$, 即 $\|T_1(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ 。所以

$$\alpha_1 = |T_1(j\omega_{T_1})| < 1, \quad (4-52)$$

其中, ω_{T_1} 为 $T_1(s)$ 的峰值频率。记 $\gamma_1 = |M(j\omega_{T_1})|$, 则

$$\gamma_1 \alpha_1^{N-1} \leq AF_{f2l} = \|M(s)T_1^{N-1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \beta_2 \alpha_1^{N-1}. \quad (4-53)$$

类似于式 (4-35) 的分析, 有

$$AF_{a2a} \leq \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{PLF}(j\omega)\|_{\infty}} \sup_{\omega} \sqrt{\|G_{PLF}(j\omega)\|_1}. \quad (4-54)$$

记 ω_{M_1} 为传递函数 $M_1(s)$ 的峰值频率, 取

$$\gamma_2 = \max\{|M(j\omega_M)|, |M_1(j\omega_{M_1})|\}. \quad (4-55)$$

不难验证, 有

$$\sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PLF}}(j\omega)\|_1} \leq \sum_{i=1}^n \gamma_2 \alpha_1^{i-1} = \gamma_2 \frac{\alpha_1^N - 1}{\alpha_1 - 1}. \quad (4-56)$$

$$\sup_{\omega} \sqrt{\|G_{\text{PLF}}(j\omega)\|_{\infty}} \leq \gamma_2 \frac{\alpha_1^N - 1}{\alpha_1 - 1}.$$

根据附录引理 A-6, 有

$$\begin{aligned} AF_{a2a} = \sup_{\omega} \|G_{\text{PLF}}(j\omega)\|_2 &\geq \sup_{\omega} \left(\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |(G_{\text{PF}})_{ij}(j\omega)| \right) \\ &\geq \gamma_2. \end{aligned} \quad (4-57)$$

所以, 可知

$$\gamma_2 \leq AF_{a2a} \leq \gamma_2 \frac{\alpha_1^N - 1}{\alpha_1 - 1}. \quad (4-58)$$

■

评注 4-1. 根据定理 4-1, 在 PF 结构下, 队列的鲁棒指标 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 均随规模增加呈指数增长。这种特性与控制器增益的选择无关, 是 PF 结构的一种固有缺陷。该现象与 Seiler 等研究结果相符, Seiler 等指出 PF 结构匀质队列, 利用相对距离误差的任意线性控制器均不能达到队列稳定^[85]。而定理 4-1 进一步指出, 即使利用相对速度以及加速度信息的线性控制器, 这一性能指标也不能满足。

评注 4-2. 定理 4-1 中的指数增长的界与 Hao 等的研究一致。但 Hao 等采用双积分器作为车辆节点的模型, 忽略了车辆动力系统中的时滞^[83], 从而本文的结果能够更精确地指出实际车辆队列鲁棒性能指标的变化。

评注 4-3. 根据定理 4-2, 当队列中的领航车辆将其状态信息广播给所有跟随车辆, 形成 PLF 结构时, 则 AF_{f2l} 均随规模增大呈指数衰减, AF_{a2a} 与规模无关。这表明领航车辆信息不仅有利于提高稳定裕度, 也有利于改善鲁棒性能。

评注 4-4. 根据定理 4-2 中式 (4-46), 对于 PLF 结构下, 给定的控制器增益, 要想保证性能指标 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 不发散, 一个充分条件是时滞常数满足一个上界

$$\tau \leq \frac{3k_a^2 + 4k_a + 1}{4k_v}. \quad (4-59)$$

4.3 双向拓扑结构下队列的鲁棒性能分析



图 4-2 双向跟随式拓扑结构

如图 4-2 所示, 本节针对双向跟随式 (bidirectional, BD) 结构下的匀质队列, 讨论鲁棒指标的变化趋势。在 BD 结构中, 单个车辆能获取其前车与后车的状态信息, 所以有

$$\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-60)$$

其中, $\mathcal{L}_{\text{BD}}, \mathcal{P}_{\text{BD}}$ 分别为对应于 BD 结构的拉普拉斯矩阵和牵引矩阵。由于 $\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}$ 为对称矩阵, 从而存在正交矩阵 $\mathbf{V} = [v_1, v_1, \dots, v_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_N$, 使得

$$\mathbf{V}^T(\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}})\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix}. \quad (4-61)$$

其中, λ_i 为矩阵 $\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}$ 的特征根。

式 (4-61) 也可表示为 $\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$, 所以, 对于 BD 结构下, 扰动 \mathbf{W} 到位移偏差 \mathbf{Y} 的传递函数为

$$\begin{aligned} G_{\text{BD}}(s) &= [\mathbf{I}_N \otimes (\tau s^3 + s^2) + (\mathcal{L}_{\text{BD}} + \mathcal{P}_{\text{BD}}) \otimes (k_p + k_v s + k_a s^2)]^{-1} \\ &= [\mathbf{V}\mathbf{V}^T(\tau s^3 + s^2) + \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T(k_p + k_v s + k_a s^2)]^{-1} \\ &= \{\mathbf{V}[(\tau s^3 + s^2) + \mathbf{\Lambda}(k_p + k_v s + k_a s^2)]\mathbf{V}^T\}^{-1} \\ &= \mathbf{V}^T[(\tau s^3 + s^2) + \mathbf{\Lambda}(k_p + k_v s + k_a s^2)]^{-1}\mathbf{V} \end{aligned} \quad (4-62)$$

即,

$$G_{\text{BD}}(s) = \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} G_1(s) & & & \\ & G_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_N(s) \end{bmatrix} \mathbf{V}. \quad (4-63)$$

其中,

$$G_i(s) = \frac{1}{\tau s^3 + (1 + \lambda_i k_a) s^2 + \lambda_i k_v s + \lambda_i k_p}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

下面的定理给出 BD 结构下, 匀质队列的增益因子 AF_{a2a} 随规模的变化趋势。

定理 4-3: 给定存在扰动下的匀质队列, 其动力学由式 (4-4) 描述, 控制增益满足式 (3-12), 则增益因子 AF_{a2a} 随队列规模至少呈 $O(N^2)$ 增长。

证明: 根据式 (4-19), 有

$$\begin{aligned} AF_{a2a} &= \|G_{\text{BD}}\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \sqrt{\rho(G_{\text{BD}}^*(j\omega)G_{\text{BD}}(j\omega))} \\ &= \sup_{\omega} \max_i \sqrt{[G_i^*(j\omega)G_i(j\omega)]} \\ &= \max_i \sup_{\omega} \sqrt{[G_i^*(j\omega)G_i(j\omega)]} \\ &= \max_i \|G_i\|_{\mathcal{H}_\infty} \end{aligned} \quad (4-64)$$

下面, 对 $\|G_i\|_{\mathcal{H}_\infty}$ 进行分析,

$$\begin{aligned} \|G_i\|_{\mathcal{H}_\infty} &= \sup_{\omega} \sqrt{\frac{1}{(\lambda_i k_v \omega - \tau \omega^3)^2 + [\lambda_i k_p - (1 + \lambda_i k_a) \omega^2]^2}} \\ &= \sup_{\omega} \sqrt{\frac{1}{\tau^2 \omega^6 + [(1 + \lambda_i k_a)^2 - 2\lambda_i k_v \tau] \omega^4 + [(\lambda_i k_v)^2 - 2\lambda_i k_p (1 + \lambda_i k_a)] \omega^2 + (\lambda_i k_p)^2}} \\ &\geq \frac{1}{\lambda_i k_p} \end{aligned}$$

从而有

$$AF_{a2a} = \|G_{\text{BD}}\|_{\mathcal{H}_\infty} \geq \frac{1}{\lambda_{\min} k_p}. \quad (4-65)$$

根据式 (3-34),

$$\frac{1}{N^2} \leq \lambda_{\min} \leq \frac{\pi^2}{N^2}. \quad (4-66)$$

所以,

$$AF_{a2a} = \|G_{\text{BD}}\|_{\mathcal{H}_\infty} \geq \frac{N^2}{\pi^2 k_p}. \quad (4-67)$$

即说明, 增益因子 AF_{a2a} 随队列规模至少呈 $O(N^2)$ 增长。 ■

评注 4-5. 在 BD 结构下, 采用线性控制器, 队列的鲁棒指标 AF_{a2a} 同样会随规模增长而逐渐发散。但这种发散的速度相较于 PF 结构已经有了很大的改进。一种直观解释是, PF 结构下误差是单向累计传播的, 故而呈指数增长; 而 BD 结构下, 误差可以双向传递, 互相抵消了一部分, 故而误差增长速度降低。

评注 4-6. Seiler 等指出 BD 结构下, 采用线性控制器时, 队列稳定性指标会发散^[85]; 而**定理 4-3**给出了这一发散速度的下界。

评注 4-7. 注意到当队列中节点采用双积分器描述时, 增益因子 AF_{a2a} 随队列规模增长的速度可以进一步精确刻画为 $O(N^3)$ ^[83]。

评注 4-8. **定理 4-3**并没有给出增益因子 AF_{f2l} 的变化趋势。根据式 (4-63) 可知扰动 w_1 到位移偏差输出 \tilde{p}_N 的传递函数为:

$$[G_{BD}]_{N1} = \sum_{i=1}^N v_{Ni}v_{1i}G_i(s). \quad (4-68)$$

在三阶动力学模型下解析求解这一传递函数的无穷范数比较困难。当采用双积分器模型描述时, 增益因子 AF_{f2l} 的速度可以刻画为 $O(N)$ ^[83]。

评注 4-9. 根据**定理 4-3**的分析, 结合**定理 3-3**中对 BDL 结构的叙述, 容易知道 BDL 结构下, 队列的鲁棒增益因子 AF_{a2a} 与队列规模无关。

评注 4-10. Herman 等指出在 BD 结构下, 扰动 w_1 到位移偏差输出 \tilde{p}_N 的传递函数式 (4-68) 可以写成乘积的形式^{[107][108]}:

$$[G_{BD}]_{N1} = \frac{\lambda_1}{(a + \lambda_1 b)} \prod_{i=2}^N \frac{\lambda_i b}{a + \lambda_i b}. \quad (4-69)$$

其中 $a = \tau s^3 + s^2, b = k_p + k_v s + k_a s^2, \lambda_i$ 为矩阵 $\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD}$ 的特征根。对于 BD 结构下非对称控制的匀质队列, 式 (4-69) 同样成立。Herman 等指出采用非对称控制, λ_i 不趋向零且存在一个下界, 这导致增益因子 AF_{f2l} 随队列规模呈指数增长^{[107][108]}。而第三章指出, 非对称控制可以得到与队列规模无关的稳定裕度。这说明对于非对称控制, 存在稳定裕度和鲁棒指标的权衡取舍问题。

4.4 数值仿真分析

本节给出数值仿真结果, 以验证前文针对 PF、PLF、BD 拓扑结构下增益因子的分析。本节所有仿真中, 车辆节点时滞常数为 $\tau = 0.5 \text{ s}$, 控制器增益为 $k_p = 1, k_v = 2, k_a = 0.5$ 。容易验证, 这组参数符合上述定理的要求。

4.4.1 单向级联结构的仿真

为验证**定理 4-1**的结论，本文数值地计算了 PF 结构队列，在不同规模下的增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 变化趋势，以及相应上下界。如图 4-3 所示，可以发现 AF_{f2l} 与 AF_{a2a} 确实呈指数增长，且**定理 4-1**中给出的上下界比较准确。图 4-4 展示不同队列规模下，首车输入扰动 $w_1(t)$ 对队尾车辆位移偏差 $\tilde{p}_N(t)$ 传递函数的幅频特性曲线。可以发现传递函数峰值确实指数上升，且峰值频率基本不发生变化。

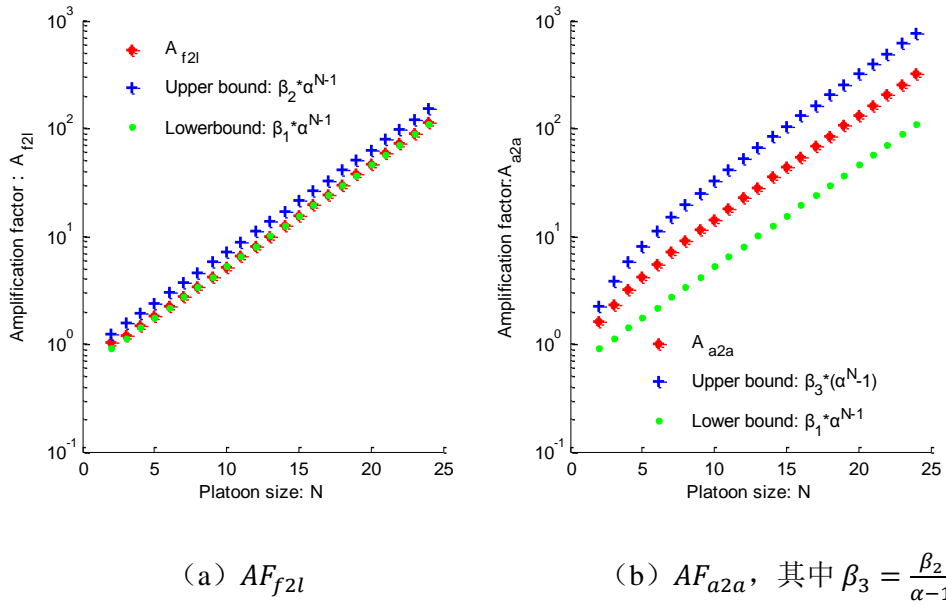


图 4-3 PF 结构下队列鲁棒指标变化趋势

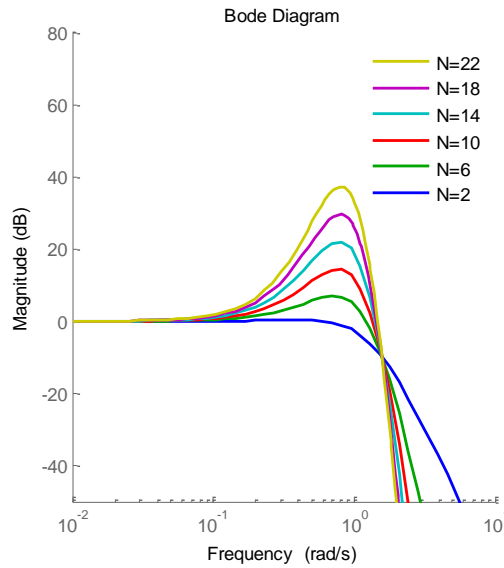
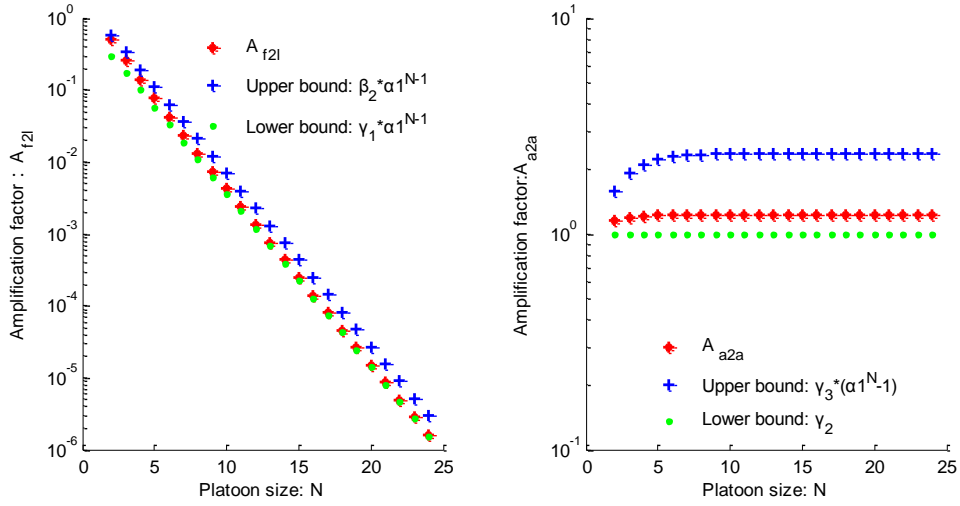


图 4-4 PF 结构下队首节点输入扰动 $w_1(t)$ 对队尾节点位移偏差 $\tilde{p}_N(t)$ 的传递函数

同样，为验证**定理 4-2**，本文数值地计算了 PLF 结构的队列，在不同规模下的增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 变化趋势，以及相应上下界。计算结果如图 4-5 所示，可以发现 AF_{f2l} 呈指数衰减，且 AF_{a2a} 有界，不随队列规模变化。此外，图 4-6 展示了不同队列规模下，首车输入扰动 $w_1(t)$ 对队尾车辆位移偏差 $\tilde{p}_N(t)$ 传递函数的幅频特性曲线。其传递函数峰值确实指数衰减，且峰值频率基本不发生变化。



(a) AF_{f2l}

(b) AF_{a2a} , 其中 $\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\alpha_1 - 1}$

图 4-5 PLF 结构下队列鲁棒指标变化趋势

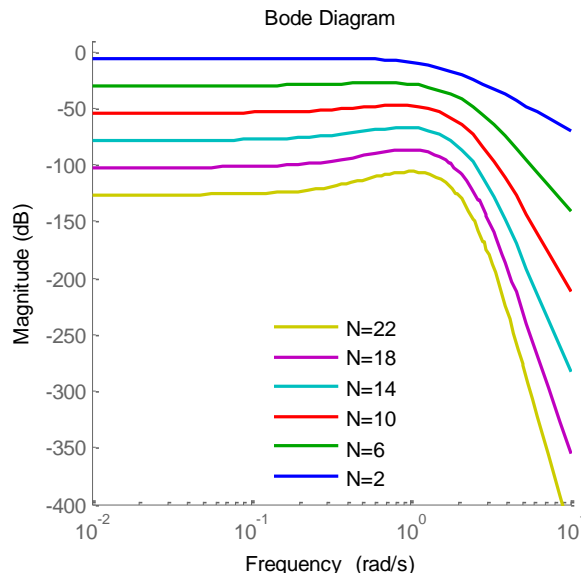


图 4-6 PLF 结构下队首输入扰动 $w_1(t)$ 对队尾位移偏差 $\tilde{p}_N(t)$ 的传递函数幅频特性曲线

4.4.2 双向拓扑结构的仿真

图 4-7 展示了 BD 结构下，鲁棒增益因子 AF_{a2a} 随队列规模的变化趋势。可以看出， AF_{a2a} 确实随队列规模呈多项式增长，且 $N^2/(\pi^2 k_p)$ 是 AF_{a2a} 的一个下界。这与定理 4-3 的结论相符。

图 4-8 展示了 BD 拓扑结构下队列队首扰动对队尾车辆位移偏差的影响。可以看出增益因子 AF_{f2l} 随队列规模呈线性关系，且峰值频率随着队列规模的增大向零点偏移，这对应于 BD 结构下 $\mathcal{L}_{BD} + \mathcal{P}_{BD}$ 的最小特征根趋向于零。相比较于 PF 结构下，增益因子呈指数增长趋势，从鲁棒性角度而言，BD 结构要优于 PF 结构。

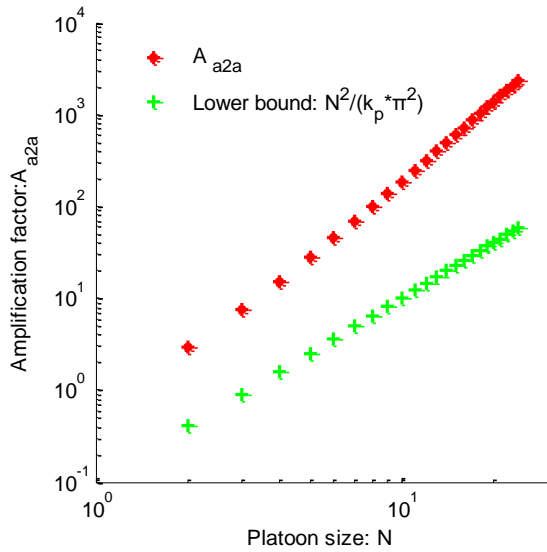
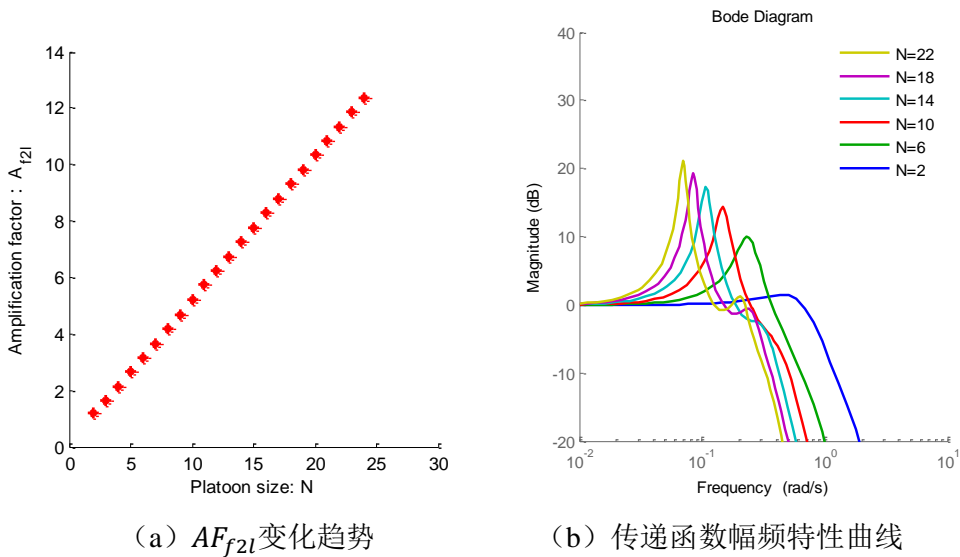


图 4-7 BD 结构下队列鲁棒指标 AF_{a2a} 变化趋势



(a) AF_{f2l} 变化趋势

(b) 传递函数幅频特性曲线

图 4-8 BD 结构队首扰动对队尾车辆位移偏差的影响

图 4-9 和图 4-10 展示了 BDL 结构下, 队列的鲁棒性能随队列规模的变化趋势。可以看出, 当所有跟随车辆能够获取领航车辆信息时, 增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 都得到了显著改善。前者随队列规模指数衰减, 而后者与队列规模无关 (这对应于 BDL 结构下 $\mathcal{L}_{BDL} + \mathcal{P}_{BDL}$ 的最小特征根为常数, 与队列规模无关)。

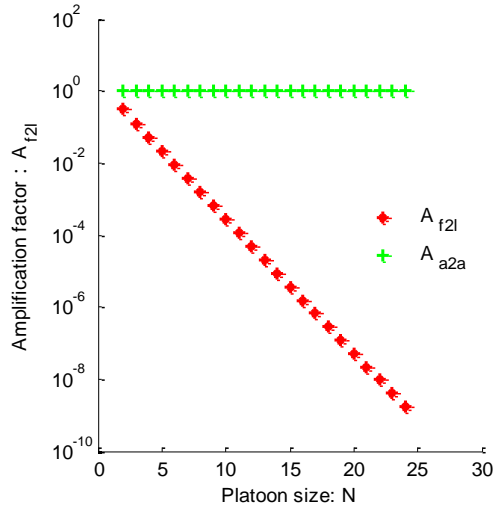


图 4-9 BDL 结构下队列鲁棒指标 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 变化趋势

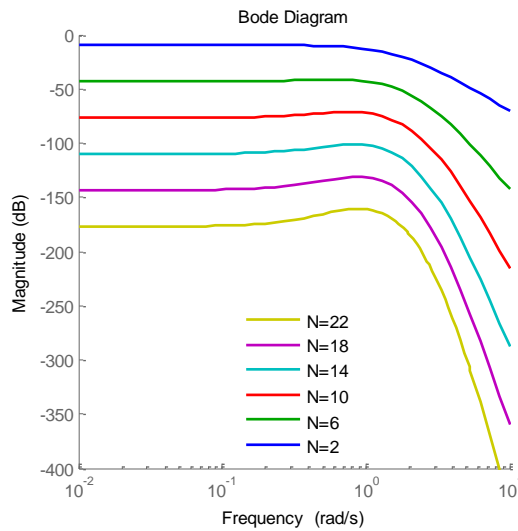


图 4-10 BDL 结构队首扰动对队尾车辆位移偏差传递函数的幅频特性曲线

图 4-11 和图 4-12 展示了 BD 结构下, 当采用非对称控制时, 队列鲁棒指标的变化趋势。可以发现, 引入非对称控制后, 增益因子 AF_{f2l} 随队列规模呈指数增长。显然, 相较于 BD 结构下的对称控制, 非对称控制不利于改善鲁棒性能, 而第三章中指出非对称控制可以得到与队列规模无关的稳定裕度。这两种现象说明, 对于非对称控制存在稳定裕度和鲁棒指标的取舍问题。

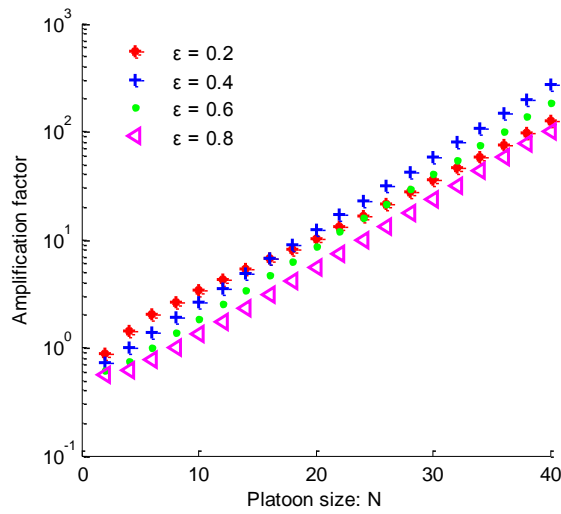


图 4-11 BD 结构下非对称控制的车辆队列，不同非对称度时增益因子 AF_{f2l} 变化趋势

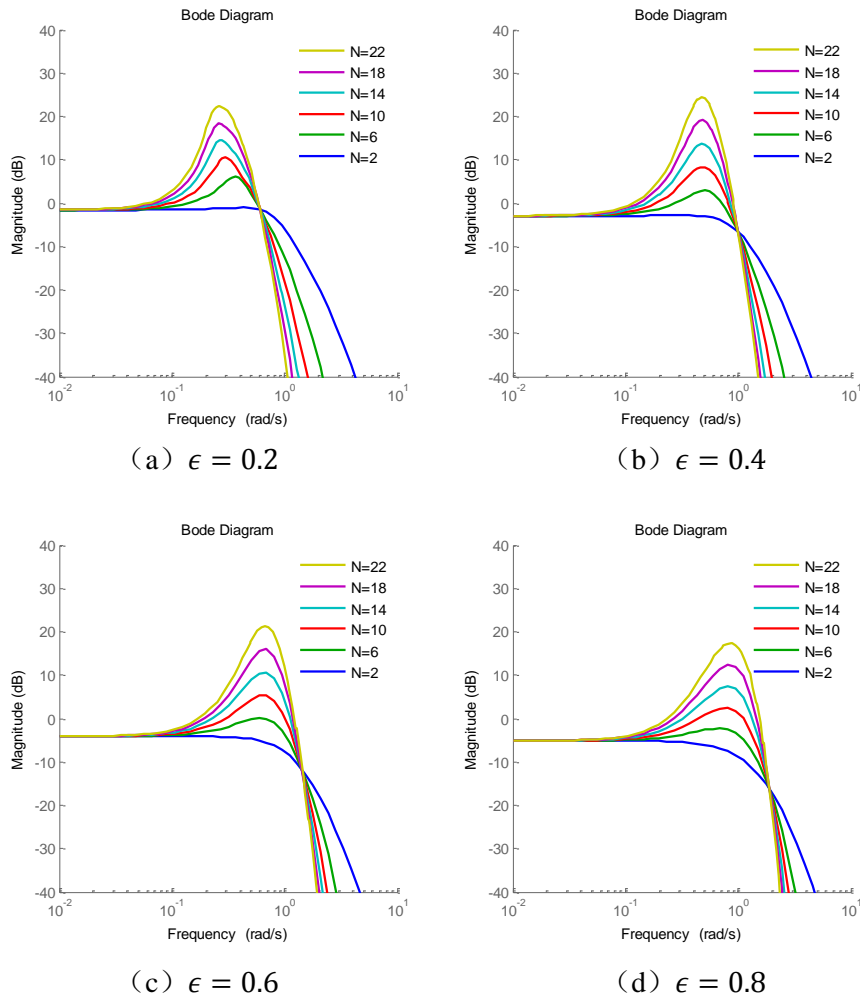


图 4-12 BD 结构下非对称控制的车辆队列，队首扰动对队尾车辆位移偏差传递函数的幅频特性曲线

4.5 本章小结

依托所出的四元素模型框架，本章研究了有限能量扰动下线性匀质队列的鲁棒性能。首先，建立了一般信息流拓扑结构下的队列闭环动力学时域和频域模型；然后，针对单向级联和双向拓扑结构下车辆队列，讨论了增益因子 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 随队列规模的变化趋势。结论如下：

(1) 在 PF 结构下，线性匀质队列的鲁棒指标 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 随队列规模呈指数增长。这与线性控制器的增益选择无关，是 PF 结构的一种固有缺陷。对于 PF 结构的匀质队列，一个微小扰动会依然对队列的输出产生巨大影响。

(2) 若每个跟随车辆均能获取领航车辆信息，形成 PLF 结构，则队列鲁棒指标 AF_{f2l} 和 AF_{a2a} 得到显著改善。这说明与领航车辆的通信能力，对改善队列性能具有重要作用。

(3) 在 BD 结构下，线性匀质队列的鲁棒指标 AF_{a2a} 随队列规模至少呈多项式 $O(N^2)$ 增长。相比于 PF 结构，BD 结构下的增长速度已经得到了改善。这说明从鲁棒性能角度，BD 结构优于 PF 结构。

(4) 仿真结果表明 BD 结构下，采用非对称控制时，队列鲁棒指标 AF_{f2l} 的增长趋势会由多项式形式变成指数形式。这说明非对称控制不利于改善队列的鲁棒性能，而第 3 章指出非对称控制有利于提高稳定裕度。这两种性能指标之间存在一个权衡问题，具体选择需要进一步研究。

第5章 车辆队列的预测控制器设计

针对车辆队列中节点动力学的非线性和异质性问题，本章提出一种分布式模型预测控制器（Distributed Model Predictive Control, DMPC）设计方法，以保证系统的渐近稳定性。首先，基于四元素框架建立离散非线性车辆队列的动力学模型；其次，给出分布式模型预测控制器的设计过程，包括单个节点的优化问题和预测控制器算法的流程；然后，对分布式模型预测控制器的渐近稳定性进行分析，提出一种保证队列渐近稳定性的充分条件；最后，仿真结果验证了理论分析的正确性。

5.1 非线性车辆队列的建模

根据四元素模型，车辆节点之间动力学相互解耦。为实现队列目标，单个节点利用邻域节点的信息做出控制决策，使得队列中节点之间产生相互影响。控制决策体现在使用邻域信息的方式上，可以是线性反馈（如第3、4章），也可以通过求解优化问题得到。

本节介绍车辆节点的离散非线性动力学模型，邻域信息交互、以及控制决策将在下一节阐述。车辆模型采用第2章中介绍的非线性模型（2-1），即

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = v_i(t) \\ \frac{\eta_{T,i}}{r_{w,i}} T_i(t) = m_i \dot{v}_i(t) + C_{A,i} v_i^2(t) + m_i g f_i, & i \in \mathcal{N}. \\ \tau_i \dot{T}_i(t) + T_i(t) = u_i(t) \end{cases} \quad (5-1)$$

其中， \mathcal{N} 表示正整数集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ ， $p_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 分别为车辆 i 的位移和速度， m_i 为车辆的质量， $C_{A,i}$ 为集总空气阻力系数， g 为重力加速度常数， f_i 为滚动阻力系数， $T_i(t)$ 为实际驱动/制动力的力矩， $u_i(t)$ 为期望驱动/制动力矩， τ_i 为车辆纵向动力系统的时滞常数， $r_{w,i}$ 为车轮半径， $\eta_{T,i}$ 为传动系统的机械效率。

单个节点的状态记为 $\mathbf{x}_i(t) = [p_i(t), v_i(t), T_i(t)]^T$ ，控制输入记为 $u_i(t)$ 。离散步长为 Δt ，式（5-1）可以离散为

$$\begin{cases} p_i(t+1) = p_i(t) + v_i(t) \Delta t \\ v_i(t+1) = v_i(t) + \frac{1}{m_i} \left(\frac{\eta_{T,i}}{r_{w,i}} T_i(t) - C_{A,i} v_i^2(t) - m_i g f_i \right) \Delta t \\ T_i(t+1) = T_i(t) - \frac{1}{\tau_i} T_i(t) \Delta t + \frac{1}{\tau_i} u_i(t) \Delta t \end{cases} \quad (5-2)$$

进一步，式 (5-2) 可以写为

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \phi_i(\mathbf{x}_i) + \boldsymbol{\psi}_i \cdot u_i(t), \quad i \in \mathcal{N}, \quad (5-3)$$

其中， $\phi_i(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ， $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ， $u_i(t) \in \mathbb{R}$ ，具体表达式为

$$\phi_i = \begin{bmatrix} p_i(t) + v_i(t)\Delta t \\ v_i(t) + \frac{\Delta t}{m_i} \left(\frac{\eta_{T,i}}{R_i} T_i(t) - C_{A,i} v_i^2(t) - m_i g f_i \right) \\ T_i(t) - \frac{1}{\tau_i} T_i(t)\Delta t \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau_i} \Delta t \end{bmatrix}.$$

车辆节点 i 的输出方程为

$$\mathbf{y}_i(t) = [p_i(t), v_i(t)]^T = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{x}_i(t), \quad (5-4)$$

其中， $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ 为输出矩阵，

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{3N}$ ， $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1^T(t), \mathbf{y}_2^T(t), \dots, \mathbf{y}_N^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2N}$ 和 $\mathbf{U}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N$ 分别表示队列在 t 时刻的集总状态、输出和输入向量。则队列的整体动力学可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t+1) &= \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}(t)) + \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{U}(t), \\ \mathbf{Y}(t) &= \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{X}(t), \end{aligned} \quad (5-5)$$

其中， $\boldsymbol{\Phi} = [\phi_1(\mathbf{x}_1)^T, \phi_2(\mathbf{x}_2)^T, \dots, \phi_N(\mathbf{x}_N)^T]^T$ ， $\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}\{\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_N\}$ ， $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \dots, \boldsymbol{\gamma}\}$ 。

式 (5-5) 即为车辆的离散非线性队列动力学模型，注意到该模型是一个非线性异质模型。队列构型和信息流拓扑结构的特性，将在控制输入向量 $\mathbf{U}(t)$ 的设计中体现。

5.2 分布式模型预测控制器设计

本节介绍分布式模型预测控制器的设计过程。首先，概述分布式模型预测技术；其次，设计单个节点优化问题；最后，给出整个分布式预测控制器算法流程。

5.2.1 分布式模型预测控制概述

模型预测控制 (Model Predictive Control, MPC) 是一种基于优化的控制设计方法，其特点在于：采用有限时域代替最优控制中的无限时域，在每一采样时刻在线求解开环优化问题得到控制量^[121]。由于能够显式地处理状态和执行器约束、

多个控制器目标、以及能够预测动力学变化，MPC 技术在实际问题中得到了广泛的应用^[122]。然而，集中式 MPC 存在一些缺陷^[123]：1) 当问题规模较大时，求解速度受限；2) 难以处理变结构的动力学系统，比如智能电网、车辆队列中子系统随时接入与分离；3) 大规模的系统通信受限，无法进行集中化处理等。

分布式模型预测控制 (Distributed Model Predictive Control, DMPC) 是解决上述问题的一种可期待方案。对于 DMPC 技术，系统在每一个采样时刻不只是求解单个开环优化问题，而是求解多个开环优化问题^[124]。在 DMPC 中，每个子优化问题面对的是局部目标、局部动力学、局部约束、局部状态。基于局部信息如何保证全局的目标，是 DMPC 的一个难点^[123]。由于大规模系统分布式控制的复杂性，目前 DMPC 尚未形成一般性设计方法^[123]。

5.2.2 单节点优化问题设计

本节假设队列期望跟车距离为恒定距离型，即 $d_{i-1,i} = d_0$ 。领航车辆的位移和速度分别用 $s_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 进行表示。领航车辆的期望轨迹假设为匀速运动，即 $p_0 = v_0 t$ 。此时，队列中单个节点的期望状态和期望输入分别为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i,\text{des}}(t) = [p_{i,\text{des}}(t), v_{i,\text{des}}(t), T_{i,\text{des}}(t)]^T, \\ u_{i,\text{des}}(t) = T_{i,\text{des}}(t), \end{cases} \quad (5-6)$$

其中， $p_{i,\text{des}}(t) = p_0(t) - i \cdot d_0$ ， $v_{i,\text{des}}(t) = v_0$ ， $T_{i,\text{des}}(t) = h_i(v_0)$ 。函数 $h_i(v_0)$ 为自行车速度的函数，用于平衡风阻和道路摩擦阻力，表示为

$$h_i(v_0) = \frac{R_i}{\eta_{T,i}} (C_{A,i} v_0^2 + m_i g f_i). \quad (5-7)$$

采用有向图 $\mathcal{G}_N = \{\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N\}$ 和增广有向图 $\mathcal{G}_{N+1} = \{\mathcal{V}_{N+1}, \mathcal{E}_{N+1}\}$ 描述信息流拓扑结构。对于每一个车辆 $i \in \mathcal{N}$ ，其邻域节点表示为 $\mathcal{N}_i = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ 。邻域节点的状态向量表示为 $\mathbf{x}_{-i}(t) = \text{col}\{\mathbf{x}_{i_1}(t), \mathbf{x}_{i_2}(t), \dots, \mathbf{x}_{i_m}(t)\}$ ，控制输入向量表示为 $\mathbf{u}_{-i}(t) = \text{col}\{u_{i_1}(t), u_{i_2}(t), \dots, u_{i_m}(t)\}$ 。定义节点 i 的领航节点可达集如下

$$\mathbb{P}_i = \begin{cases} \{0\}, & \text{if } p_i = 1 \\ \emptyset, & \text{if } p_i = 0 \end{cases} \quad (5-8)$$

其中， $p_i = 1$ ，表示节点 i 能够获取领航车辆的信息；反之， $p_i = 0$ 。

下面，在每个车辆节点上定义一个子预测优化问题。每个子问题只利用邻域车辆的信息进行优化求解，得到该节点的控制输入。在这 N 个子预测优化问题中，预测步长均为 N_p 。在每个预测时域内 $[t, t + N_p]$ ，均定义三个控制输入序列。

- 1) $\mathbf{u}_i^p(k|t)$ ：预测控制输入序列 (predicted control input)；

2) $u_i^*(k|t)$: 最优预测控制输入序列 (optimal predicted control input);

3) $u_i^a(k|t)$: 假设控制输入序列 (assumed control input);

其中, $k \in [0, 1, 2, \dots, N_p - 1, N_p]$ 。

相应地定义三个输出序列, 即 $y_i^p(k|t)$, 预测输出序列 (predicted output trajectory); $y_i^*(k|t)$: 最优预测输出序列 (optimal predicted output trajectory); $y_i^a(k|t)$, 假设输出序列 (assumed output trajectory)。假设输出序列将会发给其邻域中车辆, 作为车辆节点上子优化问题的参数之一。

下面给出节点 i 上局部优化问题 \mathcal{P}_i 的定义。

$$\begin{aligned} \min_{U_i} J_i(y_i^p(\cdot|t), u_i^p(\cdot|t), y_i^a(\cdot|t), y_{-i}^a(\cdot|t)) \\ = \sum_{k=0}^{N_p-1} l_i(y_i^p(k|t), u_i^p(k|t), y_i^a(k|t), y_{-i}^a(k|t)) \end{aligned} \quad (5-9)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^p(k+1|t) &= \phi_i(x_i^p(k|t)) + \psi_i \cdot u_i^p(k|t), \\ y_i^p(k|t) &= \gamma x_i^p(k|t), \end{aligned} \quad (5-9a)$$

$$k = 0, \dots, N_p - 1$$

$$x_i^p(0|t) = x_i(t)$$

$$u_i^p(k|t) \in \mathcal{U} \quad (5-9b)$$

$$y_i^p(N_p|t) = \frac{1}{|\mathbb{I}_i|} \sum_{j \in \mathbb{I}_i} (y_j^a(N_p|t) - \tilde{\mathbf{d}}_{j,i}) \quad (5-9c)$$

$$T_i^p(N_p|t) = h_i(v_i^p(N_p|t)) \quad (5-9d)$$

其中, $U_i = [u_i^p(0|t), u_i^p(1|t), \dots, u_i^p(N_p - 1|t)]^T$ 为待优化控制变量; 式 (5-9a) 是预测时域中的动力学约束; 式 (5-9b) 是控制输入的幅值约束; 式 (5-9c) 和式 (5-9d) 是预测终端的等式约束。 $|\mathbb{I}_i|$ 表示集合 $\mathbb{I}_i = \mathbb{N}_i \cup \mathbb{P}_i$ 的元素个数, $\tilde{\mathbf{d}}_{j,i} = [-(j-i)d_0, 0]^T$ 为节点之间的状态偏差。式 (5-9d) 是为了保证预测时域终端处的车辆节点处于一个稳态, 即匀速运动没有加减速行为。式 (5-9c) 和式 (5-9d) 的等式约束, 均是方便了分析渐近稳定性。

式 (5-9) 中的代价函数定义为

$$l_i(y_i^p(k|t), u_i^p(k|t), y_i^a(k|t), y_{-i}^a(k|t)) \quad (5-10)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\| \mathbf{Q}_i \left(\mathbf{y}_i^p(k|t) - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t) \right) \right\|_2 + \left\| \mathbf{R}_i \left(u_i^p(k|t) - h_i \left(v_i^p(k|t) \right) \right) \right\|_2 \\
 &+ \left\| \mathbf{F}_i \left(\mathbf{y}_i^p(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t) \right) \right\|_2 \\
 &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left\| \mathbf{G}_i \left(\mathbf{y}_i^p(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t) - \tilde{\mathbf{d}}_{i,j} \right) \right\|_2.
 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{G}_i$ 为权重矩阵, 均假设为对称非负定矩阵。当节点 i 可以获得领航车辆信息时, $\mathbf{Q}_i > 0$; 反之, $\mathbf{Q}_i = 0$ 。 $\mathbf{R}_i \geq 0$ 反映对加减速行为的惩罚, 表征节点偏好于匀速运动。 $\mathbf{F}_i \geq 0$ 反映节点 i 应该保持其它节点做出假设的轨迹运行。 $\mathbf{G}_i \geq 0$ 反映节点 i 尽可能保持其邻域节点的假设轨迹运行。

式 (5-9) 即为车辆节点处单个子优化问题 \mathcal{P}_i 。该优化问题只利用了邻域车辆的状态信息, 并没有用全局的状态信息。因而, 这是一个分布式优化问题。对于有 N 个跟随车辆的队列而言, 队列中便有 N 个子优化问题 \mathcal{P}_i , 需要同步求解和更新。式 (5-9c) 和式 (5-9d) 的等式约束是为了方便稳定性分析。注意到也有不少研究采用不等式终端约束来分析模型预测控制器的渐近稳定性, 此时终端状态需要约束到一个特定紧集中^{[125][126]}。

5.2.3 控制器算法流程

下面给出分布式模型预测控制器的算法流程。

DMPC 算法:

(1) 初始化。在 $t = 0$ 时刻, 假设所有车辆均处于匀速运动, 定义节点 i 上的假设输入与输出序列为

$$u_i^a(k|0) = f(v_i(0)), k = 0, 1, \dots, N_p - 1, \quad (5-11)$$

$$\mathbf{y}_i^a(k+1|0) = \mathbf{y}_i^p(k+1|0), k = 0, 1, \dots, N_p - 1.$$

其中, $\dot{\mathbf{x}}_i^p(k+1|0) = \phi_i(\mathbf{x}_i^p(k|0)) + \psi_i \cdot u_i^a(k|0)$, $\mathbf{y}_i^p(k|0) = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{x}_i^p(k|0)$, $\mathbf{x}_i^p(k|0) = \mathbf{x}_i(0)$, $k = 0, 1, \dots, N_p - 1$ 。

(2) 在任一时刻 t , 对于每一个车辆节点 $i \in \mathcal{N}$

a) 求解节点 i 出的子优化问题 \mathcal{P}_i 获得最优预测控制输入序列 $u_i^*(k|t)$, $k = 0, 1, \dots, N_p - 1$, 利用以下数据: 测量值 $\mathbf{y}_i(t)$, 节点 i 假设输出序列 $\mathbf{y}_i^a(k|t)$, 邻域节点假设输出序列 $\mathbf{y}_{i,j}^a(k|t)$, 以及领航车辆的期望序列 $\mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t)$ (若可获得);

b) 在节点 i 上应用控制量 $u_i^*(0|t)$;

c) 计算预测时域中的最优状态序列,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^*(k+1|t) &= \phi_i(\mathbf{x}_i^*(k|t)) + \boldsymbol{\psi}_i \cdot u_i^*(k|t), k = 0, 1, \dots, N_p - 1 \\ \mathbf{x}_i^*(0|t) &= \mathbf{x}_i(t), \end{aligned} \quad (5-12)$$

d) 计算下一步的假设输入序列,

$$u_i^a(k|t+1) = \begin{cases} u_i^*(k+1|t), & k = 0, 1, \dots, N_p - 2 \\ h_i(v_i^*(N_p|t)), & k = N_p - 1 \end{cases} \quad (5-13)$$

相应的假设输出轨迹为 (注意 $\mathbf{x}_i^a(0|t+1) = \mathbf{x}_i^*(1|t)$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^a(k+1|t+1) &= \phi_i(\mathbf{x}_i^a(k|t+1)) + \boldsymbol{\psi}_i \cdot u_i^a(k|t+1) \\ \mathbf{y}_i^a(k+1|t+1) &= \boldsymbol{\gamma} \mathbf{x}_i^a(k+1|t+1), k = 0, 1, \dots, N_p - 1. \end{aligned} \quad (5-14)$$

e) 通过 V2V 通信, 将 $\mathbf{y}_i^a(k|t+1)$ 发送给能接收其信息的节点, 接收其邻域中节点的假设轨迹 $\mathbf{y}_{-i}^a(k|t+1)$; 同时若与领航车辆相连时, 接收 $\mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t+1)$ 。

需要注意的是, 上述算法并没有考虑通信时延, 且假设优化问题 \mathcal{P}_i 可在一个周期内求解完毕。

5.3 车辆队列的渐近稳定性分析

本节分析节 5.2 所定义 DMPC 的渐近稳定性。首先证明所有节点的预测终端渐近收敛于期望状态; 其次, 分析单个节点上代价函数的迭代下降情况; 然后, 分析全部节点的代价函数迭代下降情况; 最后采用全部节点的代价函数作为一个 Lyapunov 函数, 给出一个保证车辆队列渐近稳定性的充分条件。

5.3.1 终端约束分析

本小节证明在式 (5-9c) 和式 (5-9d) 预测终端约束下, 以及根据 DMPC 算法的设计流程, 所有节点的预测终端状态会渐近收敛于其期望状态。

根据式 (5-13) 和式 (5-14) 对假设输出轨迹的构造, 同时考虑到式 (5-9d) 的等式约束, 有

$$\mathbf{y}_i^a(N_p|t+1) = \mathbf{y}_i^p(N_p|t) + \mathbf{C}' \mathbf{y}_i^p(N_p|t) \cdot \Delta t. \quad (5-15)$$

其中, Δt 为离散时间步长,

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

考虑式 (5-9c) 的等式约束, 有

$$\mathbf{y}_i^p(N_p|t+1) = \frac{1}{|\mathbb{I}_i|} \sum_{j \in \mathbb{I}_i} (\mathbf{y}_j^p(N_p|t) + \mathbf{C}' \mathbf{y}_j^p(N_p|t) \cdot \Delta t - \tilde{\mathbf{d}}_{j,i}). \quad (5-16)$$

定义偏差变量

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^p(N_p|t) = \mathbf{y}_i^p(N_p|t) - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(N_p|t),$$

其中 $\mathbf{y}_{i,\text{des}}(N_p|t) = [p_0(N_p|t) - i \cdot d_0, v_0]^T$ 。代入到 (5-16) 得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_i^p(N_p|t+1) &= \frac{1}{|\mathbb{I}_i|} \sum_{j \in \mathbb{I}_i} (\mathbf{y}_j^p(N_p|t) + \mathbf{C}' \mathbf{y}_j^p(N_p|t) \cdot \Delta t - \tilde{\mathbf{d}}_{j,i}) \\ &\quad - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(N_p|t+1) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{I}_i|} \sum_{j \in \mathbb{I}_i} (\mathbf{y}_j^p(N_p|t) - \mathbf{y}_{j,\text{des}}(t) + \mathbf{C}' (\mathbf{y}_j^p(N_p|t) - \mathbf{y}_{j,\text{des}}(t)) \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (5-17)$$

$$= \frac{1}{|\mathbb{I}_i|} \sum_{j \in \mathbb{I}_i} (\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}' \Delta t) \tilde{\mathbf{y}}_j^p(N_p|t).$$

定义集总预测终端变量 $\mathbf{Y}^p(N_p|t) = [\tilde{\mathbf{y}}_1^p(N_p|t), \dots, \tilde{\mathbf{y}}_N^p(N_p|t)]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$ ，则式 (5-17) 可以写为

$$\mathbf{Y}^p(N_p|t+1) = (\mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathcal{A}_N) \otimes (\mathbf{I}_2 + \mathbf{C}' \Delta t) \cdot \mathbf{Y}^p(N_p|t). \quad (5-18)$$

其中 \mathcal{A}_N 为拉普拉斯矩阵， $\mathbf{\Lambda}_1$ 定义为

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_{i=1}^N a_{1i} + p_1} & & & \\ & \frac{1}{\sum_{i=1}^N a_{2i} + p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sum_{i=1}^N a_{Ni} + p_N} \end{bmatrix}. \quad (5-19)$$

引理 5-1. 当 \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树时，矩阵 $\mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathcal{A}_N$ 的特征根幅值均小于 1，即

$$|\lambda_i(\mathbf{\Lambda}_1 \cdot \mathcal{A}_N)| < 1, i = 1, 2, \dots, N. \quad (5-20)$$

引理 5-2. 若信息流拓扑结构 \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树，

则所有优化问题 \mathcal{P}_i 的预测终端均会渐近收敛于其期望状态，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \mathbf{y}_i^p(N_p | t) - [p_0(N_p | t) - i \cdot d_0, v_0]^T \right| = 0. \quad (5-21)$$

证明：根据附录中 Kronecker 积的性质， $(\Lambda_1 \cdot \mathcal{A}_N) \otimes (I_2 + \mathbf{C}' \Delta t)$ 的最大特征根为

$$\begin{aligned} & |\lambda_{\max}[(\Lambda_1 \cdot \mathcal{A}_N) \otimes (I_2 + \mathbf{C}' \Delta t)]| \\ &= |\lambda_{\max}(\Lambda_1 \cdot \mathcal{A}_N)| \cdot |\lambda_{\max}(I_2 + \mathbf{C}' \Delta t)|. \end{aligned} \quad (5-22)$$

且易知

$$|\lambda_{\max}(I_2 + \mathbf{C}' \Delta t)| = 1. \quad (5-23)$$

当 \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树时，根据引理 5-1，有

$$|\lambda_{\max}(\Lambda_1 \cdot \mathcal{A}_N)| < 1. \quad (5-24)$$

所以，

$$|\lambda_{\max}[(\Lambda_1 \cdot \mathcal{A}_N) \otimes (I_2 + \mathbf{C}' \Delta t)]| < 1. \quad (5-25)$$

因此，动态方程 (5-18) 渐近收敛到 0，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \mathbf{y}_i^p(N_p | t) - [p_0(N_p | t) - i \cdot d_0, v_0]^T \right| = 0. \quad (5-26)$$

■

评注 5-1. 当队列中节点只能获取前方节点的信息时，矩阵 \mathcal{A}_N 具有 N 个零特征根。此时，只需要有限 N 步即可以使得队列的预测终端状态与期望状态一致。

评注 5-2. \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树这一假设，可认为是系统可控性的一个必要条件^[47]。这不仅是线性控制器的一个基本要求，也是 DMPC 的一个基本要求。

5.3.2 单个节点代价函数分析

首先说明对于 DMPC 中优化问题 \mathcal{P}_i ，若预测终端收敛于其期望状态之后，则 \mathcal{P}_i 均迭代可行 (recursive feasible)。这种分析源自 Chen 和 Allgower 的工作^[125]，之后被很多研究采用^{[31][126][127]}。

引理 5-3 若在 $t = k$ 时刻，预测终端与其期望状态相同，且具有可行解；则优化问题 \mathcal{P}_i 在时刻 $t > k$ 均具有可行解，且一个可行解为

$$\left(\mathbf{y}_i^p(:, t+1), \mathbf{u}_i^p(:, t+1) \right) = \left(\mathbf{y}_i^a(:, t), \mathbf{u}_i^a(:, t) \right). \quad (5-27)$$

下面给出在预测终端状态相同之后，单个节点代价函数的迭代下降值。

定理 5-1. 对于 DMPC 中优化问题 \mathcal{P}_i ，当节点预测终端与期望状态一致之后，节点代价函数单步迭代的下降为

$$J_i^*(t+1) - J_i^*(t) \leq -l_i(\mathbf{y}_i^*(0|t), \mathbf{u}_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(0|t), \mathbf{y}_{-i}^a(0|t)) + \varepsilon_i. \quad (5-28)$$

其中， $J_i^*(t)$ 为优化问题 \mathcal{P}_i 在 t 时刻的最优值， ε_i 定义为

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N_p-1} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \|\mathbf{G}_i(\mathbf{y}_j^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t))\|_2 - \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 \right\}. \quad (5-29)$$

证明： 节点 i 在 t 时刻的最优代价函数值为

$$\begin{aligned} J_i^*(t) &= J_i^*(\mathbf{y}_i^*(:|t), \mathbf{u}_i^*(:|t), \mathbf{y}_i^a(:|t), \mathbf{y}_{-i}^a(:|t)) \\ &= \sum_{k=0}^{N_p-1} l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), \mathbf{u}_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^a(k|t), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t)) \\ &= \sum_{k=0}^{N_p-1} \left\{ \|\mathbf{Q}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t))\|_2 + \|\mathbf{R}_i(\mathbf{u}_i^*(k|t) - f(\mathbf{v}_i^*(k|t)))\|_2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 + \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \|\mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t) + \tilde{\mathbf{d}}_{i,j})\|_2 \right\} \end{aligned}$$

根据引理 5-3，优化问题 \mathcal{P}_i 在 $t+1$ 时刻的一个可行解为

$$\mathbf{u}_i^p(:|t+1) = \mathbf{u}_i^a(:|t+1). \quad (5-30)$$

从而， $t+1$ 时刻优化问题 \mathcal{P}_i 的最优代价值为

$$\begin{aligned} J_i^*(t+1) &\leq J_i(\mathbf{y}_i^p(:|t+1), \mathbf{u}_i^p(:|t+1), \mathbf{y}_i^a(:|t+1), \mathbf{y}_{-i}^a(:|t+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{N_p-1} l_i(\mathbf{y}_i^p(k|t+1), \mathbf{u}_i^p(k|t+1), \mathbf{y}_i^a(k|t+1), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t+1)). \end{aligned} \quad (5-31)$$

注意到 $k = N_p - 1$ 时，

$$l_i(\mathbf{y}_i^p(k|t+1), u_i^p(k|t+1), \mathbf{y}_i^a(k|t+1), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t+1)) = 0.$$

所以有

$$\begin{aligned} J_i^*(t+1) &\leq \sum_{k=0}^{N_p-2} l_i(\mathbf{y}_i^p(k|t+1), u_i^p(k|t+1), \mathbf{y}_i^a(k|t+1), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{N_p-2} l_i(\mathbf{y}_i^*(k+1|t), u_i^*(k+1|t), \mathbf{y}_i^*(k+1|t), \mathbf{y}_{-i}^*(k+1|t)) \quad (5-32) \\ &= \sum_{k=1}^{N_p-1} l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^*(k|t), \mathbf{y}_{-i}^*(k|t)). \end{aligned}$$

将式 (5-32) 减去式 $J_i^*(t)$ ，得到

$$\begin{aligned} &J_i^*(t+1) - J_i^*(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N_p-1} l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^*(k|t), \mathbf{y}_{-i}^*(k|t)) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N_p-1} l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^a(k|t), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t)) \quad (5-33) \\ &= -l_i(\mathbf{y}_i^*(0|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(1|t), \mathbf{y}_{-i}^a(1|t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_p-1} \{l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^*(k|t), \mathbf{y}_{-i}^*(k|t)) \\ &\quad \quad - l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^a(k|t), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t))\}. \end{aligned}$$

下面分析式 (5-33) 中的最后一项，

$$\begin{aligned}
 \Delta &= l_i(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^*(k|t), \mathbf{y}_{-i}^*(k|t)) - l_i^a(\mathbf{y}_i^*(k|t), u_i^*(k|t), \mathbf{y}_i^a(k|t), \mathbf{y}_{-i}^a(k|t)) \\
 &= \left\| \mathbf{Q}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t)) \right\|_2 + \left\| \mathbf{R}_i(u_i^*(k|t) - f(v_i^*(k|t))) \right\|_2 \\
 &\quad + \left\| \mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t)) \right\|_2 + \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left\| \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_j^*(k|t) + \tilde{\mathbf{d}}_{i,j}) \right\|_2 \\
 &\quad - \left\{ \left\| \mathbf{Q}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_{i,\text{des}}(k|t)) \right\|_2 + \left\| \mathbf{R}_i(u_i^*(k|t) - f(v_i^*(k|t))) \right\|_2 \right. \\
 &\quad \left. + \left\| \mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t)) \right\|_2 + \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left\| \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t) + \tilde{\mathbf{d}}_{i,j}) \right\|_2 \right\}
 \end{aligned}$$

应用范数的三角不等式有

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left\{ \left\| \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_j^*(k|t) + \tilde{\mathbf{d}}_{i,j}) \right\|_2 - \left\| \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t) - \tilde{\mathbf{d}}_{i,j}) \right\|_2 \right\} \\
 &\quad - \left\| \mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t)) \right\|_2 \\
 &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left\| \mathbf{G}_i(\mathbf{y}_j^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t)) \right\|_2 - \left\| \mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t)) \right\|_2
 \end{aligned}$$

所以，对于 DMPC 中优化问题 \mathcal{P}_i ，节点代价函数单步迭代的下降为

$$J_i^*(t+1) - J_i^*(t) \leq -l_i(\mathbf{y}_i^*(0|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(0|t), \mathbf{y}_{-i}^a(0|t)) + \varepsilon_i. \quad (5-34)$$

其中， ε_i 为式 (5-29) 中的表达。 ■

评注 5-3. 若队列中各个节点的预测最优轨迹 $\mathbf{y}_i^*(k|t)$ 与假设轨迹 $\mathbf{y}_i^a(k|t)$ 足够接近，则 ε_i 接近于零，此时

$$J_i^*(t+1) \leq J_i^*(t) \quad (5-35)$$

则 $J_i^*(t)$ 可视为一个 Lyapunov 函数，根据 Lyapunov 稳定性分析易知车辆队列渐近稳定。这一结论与 Keviczky 等研究相符^{[128][129]}。

评注 5-4. 式 (5-35) 的条件难以解析地满足，并不能直接对优化问题 \mathcal{P}_i 进行构造，使得 DMPC 控制下的车辆队列渐近稳定。

5.3.3 全部节点代价函数分析

本小节进一步给出全部节点代价函数单步迭代的下降值。

定理 5-2: 对于 DMPC 中优化问题 \mathcal{P}_i , 当节点预测终端与期望状态一致之后, 全部节点代价函数单步迭代的下降为

$$\begin{aligned} & J_{\Sigma}^*(t+1) - J_{\Sigma}^*(t) \\ & \leq - \sum_{i=1}^N l_i(\mathbf{y}_i^*(1|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(1|t), \mathbf{y}_{-i}^a(1|t)) + \sum_{k=1}^{N_p-1} \varepsilon_{\Sigma}(k) \end{aligned} \quad (5-36)$$

其中, $J_{\Sigma}^*(t) = \sum_{i=1}^N J_i^*(t)$ 为全部节点在 t 时刻的最优值之和, $\varepsilon_{\Sigma}(k)$ 定义为

$$\varepsilon_{\Sigma}(k) = \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j \in \mathbb{O}_i} \|\mathbf{G}_j(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 - \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 \right].$$

其中, \mathbb{O}_i 表示能够接收节点 i 状态信息的车辆节点集合。

证明: 根据式 (5-34) 有

$$\begin{aligned} J_{\Sigma}^*(t+1) - J_{\Sigma}^*(t) & \leq \sum_{i=1}^N \{-l_i(\mathbf{y}_i^*(1|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(1|t), \mathbf{y}_{-i}^a(1|t)) + \varepsilon_i\} \\ & = - \sum_{i=1}^N l_i(\mathbf{y}_i^*(1|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(1|t), \mathbf{y}_{-i}^a(1|t)) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \end{aligned} \quad (5-37)$$

且,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i & = \sum_{k=1}^{N_p-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j \in \mathbb{N}_i} \|\mathbf{G}_i(\mathbf{y}_j^*(k|t) - \mathbf{y}_j^a(k|t))\|_2 - \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 \right] \right\} \\ & = \sum_{k=1}^{N_p-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j \in \mathbb{O}_i} \|\mathbf{G}_j(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 - \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

所以, 全部节点代价函数单步迭代的下降为式 (5-37) 所示。 ■

评注 5-5. 若下面关系式满足,

$$\sum_{j \in \mathbb{O}_i} \|\mathbf{G}_j(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 < \|\mathbf{F}_i(\mathbf{y}_i^*(k|t) - \mathbf{y}_i^a(k|t))\|_2 \quad (5-38)$$

可得到 $J_{\Sigma}^*(t+1) \leq J_{\Sigma}^*(t)$ 。则根据 Lyapunov 稳定性分析知队列渐近稳定。这一条件

可通过对子优化问题 \mathcal{P}_i 中的权重矩阵进行设计得到满足的, 参见**定理 5-3**。

5.3.4 渐近稳定性定理

本小节针对单向向后传递的信息流拓扑结构, 给出一个保证 DMPC 渐近稳定性的充分条件。

定理 5-3. 若信息流拓扑结构 \mathcal{G}_{N+1} 中存在以领航节点为根节点的有向生成树, 且车辆节点间的信息流是单向向后传递。对于本章提出的 DMPC 设计, 若满足

$$\sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j \leq \mathbf{F}_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (5-39)$$

则非线性异质车辆队列 (5-5) 渐近稳定。

证明: 由于 \mathcal{G}_{N+1} 满足有向生成树条件, 且信息流单向沿队列后方传递, 所以根据**引理 5-2** 优化问题 \mathcal{P}_i 的预测终端在最多 N 步收敛于其期望状态。即说明**定理 5-1** 和**定理 5-2** 的结论均成立。

若式 (5-39) 成立, 则

$$\mathbf{x}^T \left(\sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j - \mathbf{F}_i \right) \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x}. \quad (5-40)$$

所以, 式 (5-38) 成立, 根据**定理 5-2**,

$$J_{\Sigma}^*(t+1) - J_{\Sigma}^*(t) \leq - \sum_{i=1}^N l_i(\mathbf{y}_i^*(1|t), u_i^*(0|t), \mathbf{y}_i^a(1|t), \mathbf{y}_{-i}^a(1|t)) \quad (5-41)$$

所以 $J_{\Sigma}^*(t)$ 可作为一个 Lyapunov 函数, 根据**引理 B-3** 的 Lyapunov 分析方法知, 异质非线性车辆队列 (5-5) 渐近稳定。 ■

5.4 数值仿真分析

为了验证本章所提出 DMPC 的有效性, 本节在 MATLAB 平台下, 基于实车参数进行仿真验证。仿真主要包括两种典型工况: 1) 初始扰动工况, 2) 前车加速工况。

5.4.1 数值仿真参数设置

如图 5-1 所示, 仿真包括四种不同信息流拓扑结构, 即前车跟随式 (PF), 前

车-领航者跟随式 (PLF), 双前车跟随式 (TPF), 双前车-领航者跟随式 (TPLF)。这四种拓扑结构的信息流均是单向向后传递形式, 且存在有向生成树, 满足定理 5-3 的要求。

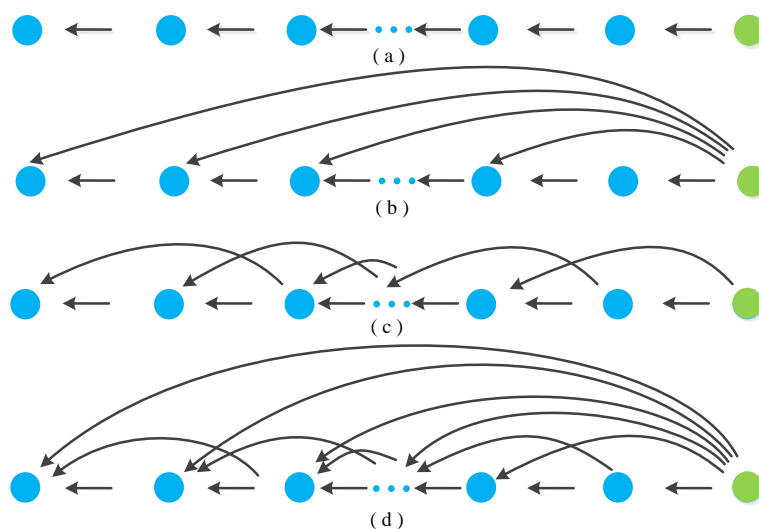


图 5-1 单向信息流拓扑结构: (a) PF; (b) PLF; (c) TPF; (d) TPLF

仿真以普通轿车的参数为基础, 进行均匀随机得到队列中的每个车辆参数。本节假设车辆动力系统的惯性时滞、集总空气阻力系数、轮胎半径均和车辆质量呈线性关系^[130]。另外, 驱动/制动力的幅值以车辆的最大加减速速度进行限制 (仿真中均为 $a_{\max} = 6 \text{ m/s}^2$, $a_{\min} = -6 \text{ m/s}^2$)。表 5-1 为参数选取, 其中 $U(1000,2000)$ 表示 1000 到 2000 的均匀分布。表 5-2 展示了本节仿真中车辆具体参数值。

表 5-1 队列中车辆的参数

参数	符号	单位	数值
队列规模	N	--	7
车辆质量	m_i	kg	$U(1 \times 10^3, 2 \times 10^3)$
惯性时滞	τ_i	s	$0.5 + (m_i - 1000)/1000 \times 0.3$
滚动阻力系数	f	--	0.01
集总空气阻力系数	$C_{A,i}$	$\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$	$0.98 + (m_i - 1000)/1000 \times 0.2$
轮胎半径	$r_{w,i}$	m	$0.3 + (m_{i,\text{veh}} - 1000)/1000 \times 0.1$
传动效率	$\eta_{T,i}$	--	96%
期望车距	d_0	m	20

表 5-2 队列中车辆各个节点的参数

车辆编号	m_i (kg)	τ_i (s)	$C_{A,i}$ ($N \cdot s^2 \cdot m^{-2}$)	$r_{w,i}$ (m)
1	1035.7	0.51	0.99	0.30
2	1849.1	0.75	1.15	0.38
3	1934.0	0.78	1.17	0.39
4	1678.7	0.70	1.12	0.37
5	1757.7	0.73	1.13	0.38
6	1743.1	0.72	1.13	0.37
7	1392.2	0.62	1.06	0.34

在仿真过程中，车辆动力学的离散时间间隔设为 $\Delta t = 0.1$ s，所有车辆节点处的预测时域步长均为 $N_p = 20$ ，重力常数为 $g = 9.81\text{m/s}^2$ 。分布式模型预测控制器中的权重矩阵设置如表 5-3。容易验证表 5-3 均符合定理 5-3 给出的充分条件。

表 5-3 DMPC 的权重矩阵

参数	PF	PLF	TPF	TPLF
F_i	$F_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$F_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$F_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$F_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$
G_i	$G_1 = 0,$ $G_i = 5I_2,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$	$G_1 = 0,$ $G_i = 5I_2,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$	$G_1 = 0,$ $G_i = 5I_2,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$	$G_1 = 0,$ $G_i = 5I_2,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$
Q_i	$Q_1 = 10I_2,$ $Q_i = 0,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1\}$	$Q_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$Q_1 = 10I_2,$ $Q_2 = 10I_2,$ $Q_i = 0,$ $i \in \mathcal{N} \setminus \{1,2\}$	$Q_i = 10I_2,$ $i \in \mathcal{N}$
R_i	$R_i = I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$R_i = I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$R_i = I_2,$ $i \in \mathcal{N}$	$R_i = I_2,$ $i \in \mathcal{N}$

5.4.2 工况 1：初始扰动仿真

在本小节工况下，领航车辆为匀速运动，速度为 $v_0 = 20$ m/s。队列中无初始位移误差，但所有跟随车辆的初始速度为 $v_i = 21$ m/s。

图 5-2-图 5-5 依次展示了初始扰动工况下，PF、PLF、TPF、TPLF 四种结构车辆队列的时域仿真结果（跟车误差的定义为 $\varepsilon_i(t) = p_i(t) - (p_0 - i \cdot d_0)$ ）。可以看

出，四种结构下的车辆队列均是渐近稳定的。仿真中可以看到，该工况下四种结构下队列的跟车误差均不超过 1 m。相较于 PF 结构，当队列中能够获取前两辆车的信息时，队列的跟车误差会减小（图 5-4）。对于 PF 结构和 TPF 结构，加速度峰值会随队列规模的增加而增长。这说明分布式模型预测控制器设计方案依然难以保证队列稳定性。

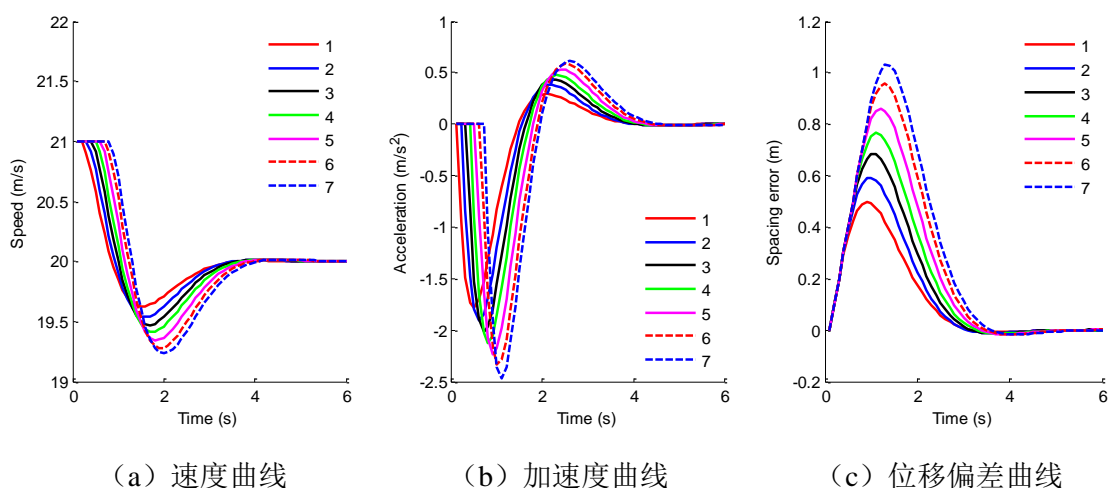


图 5-2 初始扰动工况下，PF 结构下车辆队列的时域响应

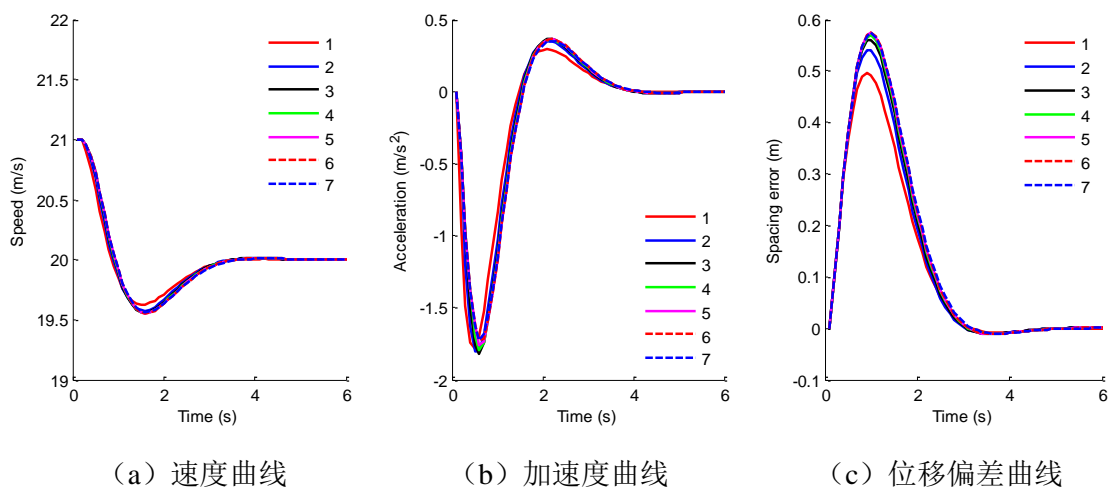


图 5-3 初始扰动工况下，PLF 结构下车辆队列的时域响应

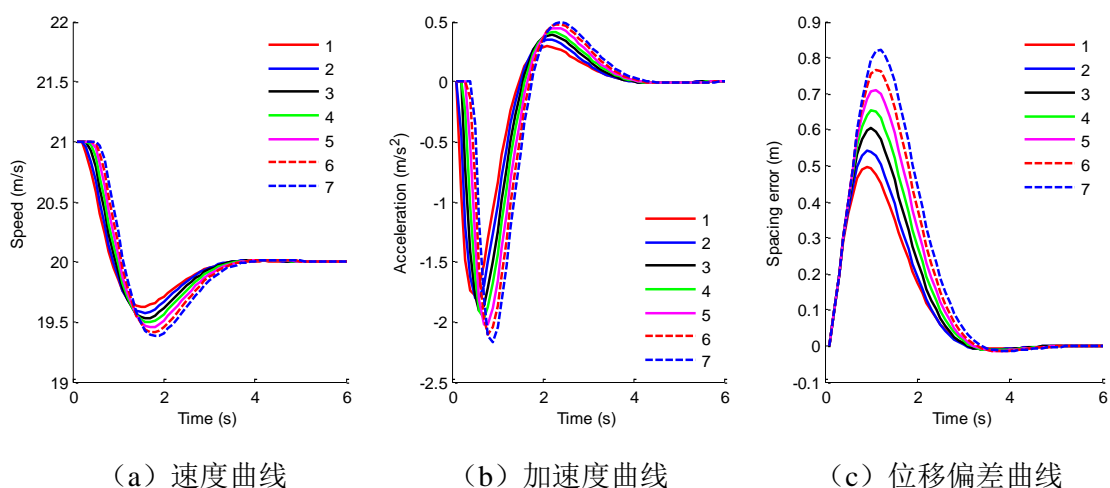


图 5-4 初始扰动工况下，TPF 结构下车辆队列的时域响应

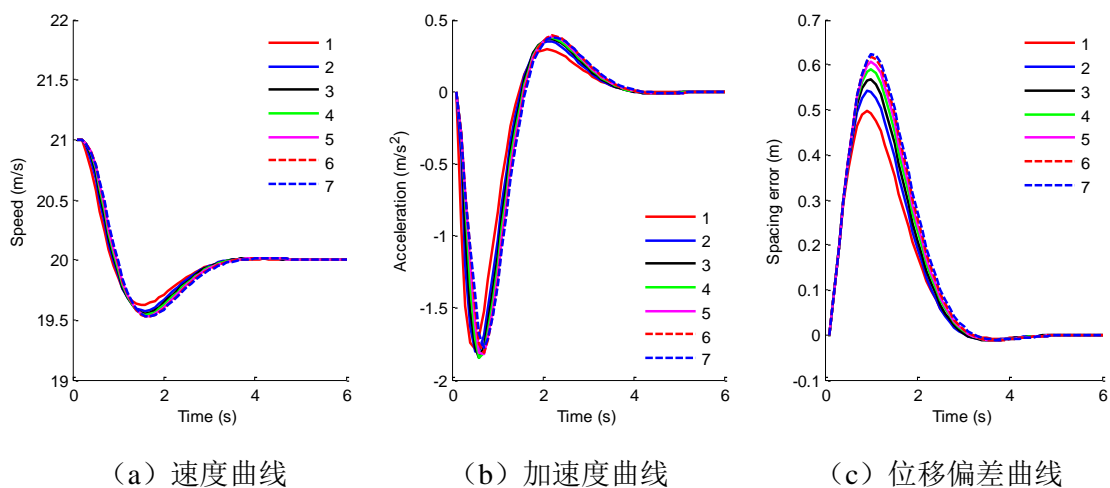


图 5-5 初始扰动工况下，PLF 拓扑结构车辆队列的时域响应

5.4.3 工况 2：前车加速仿真

在本小节的工况下，队列中无初始位移误差，也没有初始速度误差。领航车辆的加减速运动可视为一个扰动。领航车辆的轨迹设定为

$$v_0 = \begin{cases} 20 \text{ m/s} & t \leq 1 \text{ s} \\ 20 + 2t \text{ m/s} & 1 \text{ s} < t \leq 2 \text{ s} \\ 22 \text{ m/s} & t > 2 \text{ s} \end{cases}$$

图 5-6 图 5-9 展示了前车加速工况下，PF、PLF、TPF、TPLF 四种结构的时域仿真结果。仿真表明四种结构下的车辆队列均是渐近稳定的。相较于 PF 结构，TPF 结构下车辆加速度峰值更小。这说明获取前方车辆信息有利于改进队列性能。

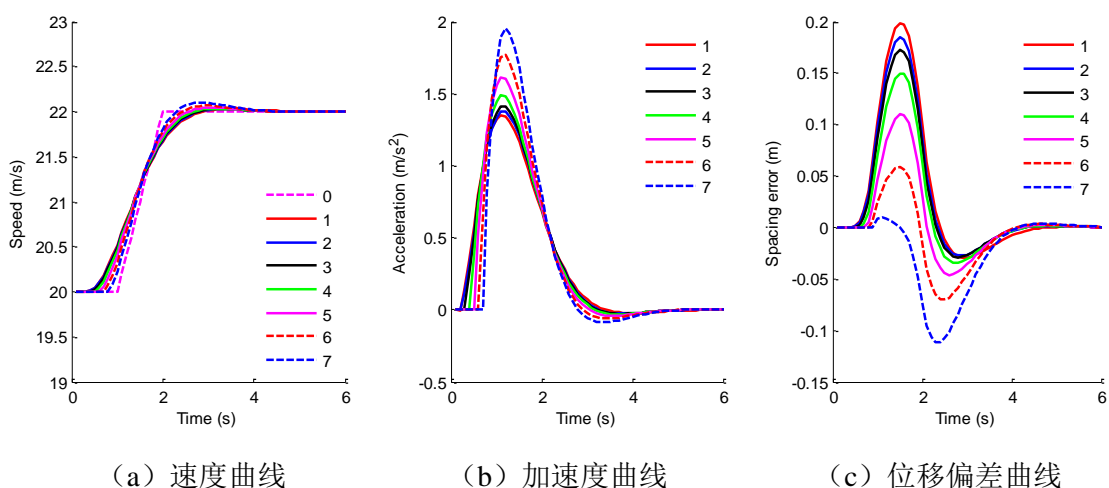


图 5-6 前车加速工况下，PF 结构下车辆队列的时域响应

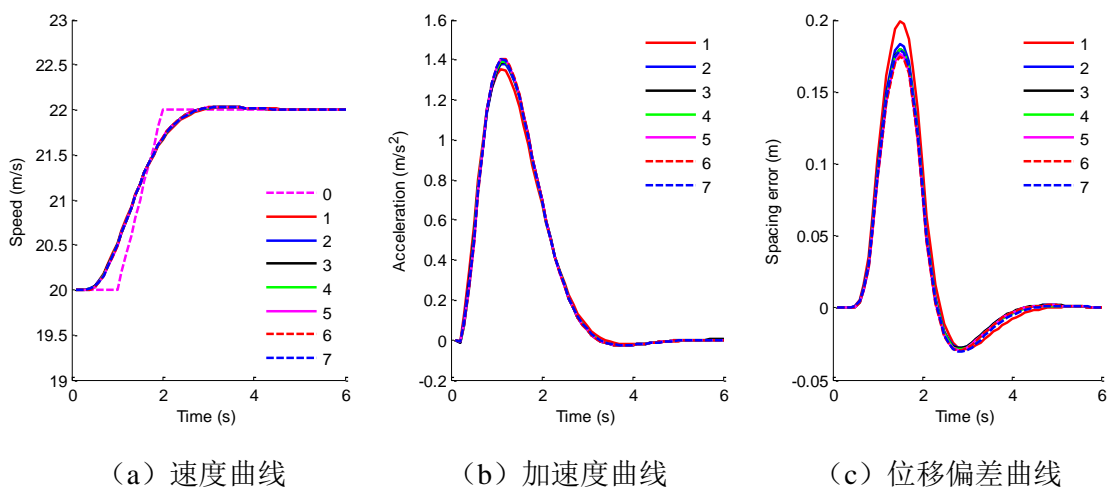


图 5-7 前车加速工况下，PLF 结构下车辆队列的时域响应

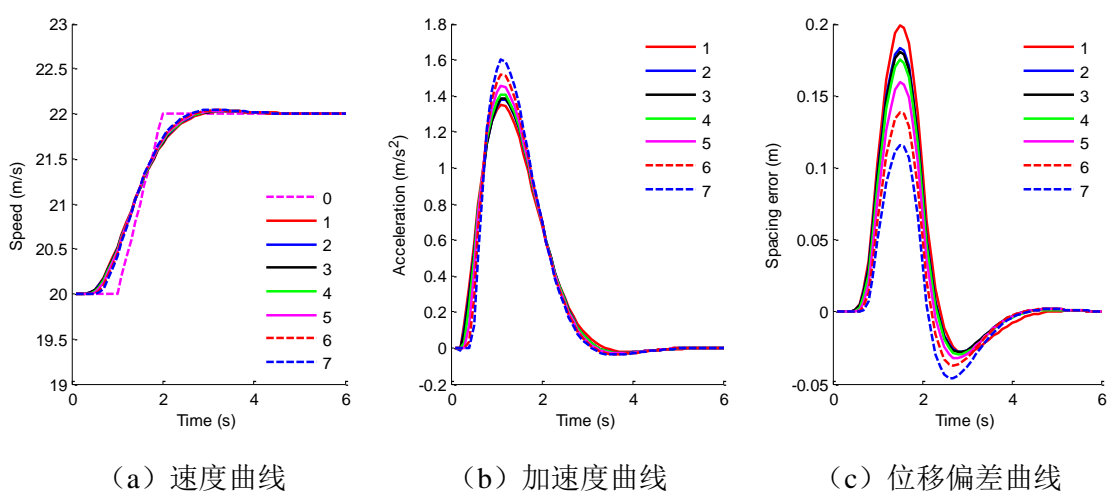


图 5-8 前车加速工况下，TPF 结构下车辆队列的时域响应

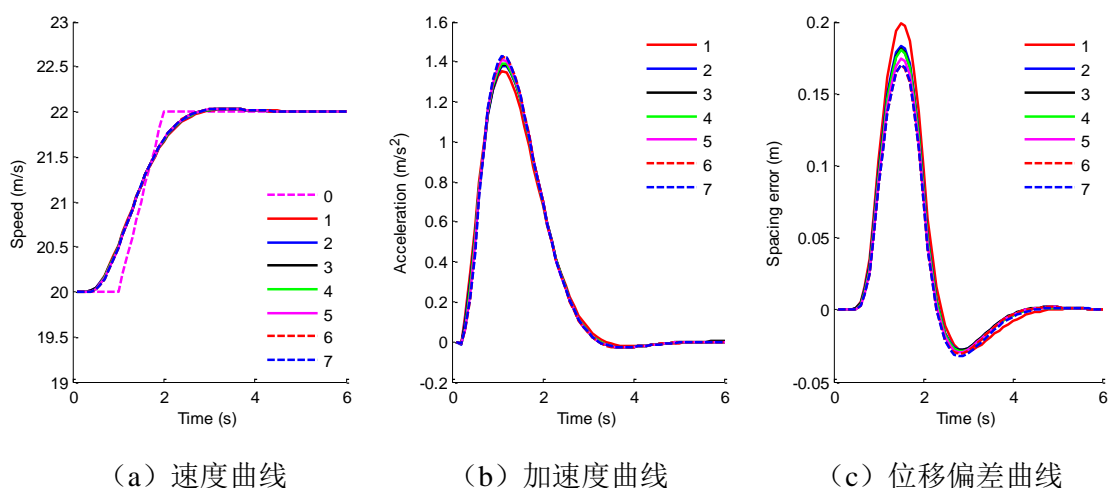


图 5-9 前车加速工况下，TPLF 结构下车辆队列的时域响应

5.5 本章小结

本章针对非线性异质车辆队列，提出了一种 DMPC 的设计方法，分析了预测终端约束、单个节点代价函数、全部节点代价函数的变化趋势，并针对存在有向生成树且信息流单向向后传递的拓扑结构，给出了车辆队列渐近稳定的一个充分条件。结论如下：

(1) 对于 DMPC 的设计，基于邻域车辆节点的预测轨迹信息对子优化问题进行构造是一种有效方案。这种设计方法仅涉及邻域内车辆的通信，而避免了进行全局通信。

(2) 信息流拓扑结构中存在有向生成树，是保证每个子优化问题终端渐近收敛至其期望状态的必要条件。这说明存在有向生成树不仅是车辆队列在线性控制器下稳定的必要条件，也是在模型预测控制器下稳定的必要条件。

(3) 将节点代价函数作为 Lyapunov 函数，分析发现保证 DMPC 渐近稳定，仅需要调整控制器的代价函数中权重矩阵，使其满足一定要求。这为非线性异质队列的分布式控制提供了一种可行的设计方法。

第6章 结论与展望

6.1 研究结论

为面向信息流拓扑结构多样化的车辆队列进行性能分析和控制器设计，本文建立了一种车辆队列动力学系统的四元素建模构架。基于该构架，本文研究了线性匀质队列的闭环稳定性和鲁棒性能，提出了一种适用于非线性异质队列的分布式模型预测控制设计方法。

首先，将车辆队列视为一种特殊的一维多智能体系统，提出了一种四元素模型构建方法。在这个模型中，队列分解为四个基本模块：1) 节点动力学；2) 信息流拓扑结构；3) 队列几何构型；4) 分布式控制器。基于四元素模型，本文对车辆队列研究现状进行了分类、梳理和总结，为全局理解车辆队列研究提供了一个有益的视角。该模型也提供了一种定量地刻画信息流拓扑结构、车辆动力学、控制器参数对队列性能影响的统一分析框架。

其次，依托所提出的四元素建模构架，分析了线性匀质队列的闭环稳定性。采用矩阵因子分解将队列动力学的闭环稳定性，等价地转化为多个子系统的闭环稳定性。所取得的主要结论包括：（1）利用 Routh-Hurwitz 稳定性判据，解析地建立了一类信息流拓扑结构下线性控制器参数的稳定区域，发现信息流拓扑结构对稳定区域的影响主要体现于 $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ 矩阵特征根上。（2）利用矩阵特征根分析，指出 BD 结构队列的稳定裕度随队列规模增加以 $O(1/N^2)$ 速度衰减到零，而 BDL 结构队列的稳定裕度可以一直远离零点，且队列规模无关。（3）BD 结构下的非对称控制可大幅度改进稳定裕度；而对于一般无向拓扑结构匀质队列，需要大量跟随车辆 ($O(N)$) 能够获取领航车辆信息，才能保证与队列规模无关的稳定裕度。

（4）通过求解局部子系统 Riccati 方程，给出了一种控制器稳定增益设计方法；该方法中 Riccati 方程规模仅和单个节点动力学维数相同，与队列规模无关，且可适用于具有一致时延的匀质队列。

然后，基于四元素模型，讨论了有限能量扰动工况下线性匀质队列的鲁棒性能。根据鲁棒控制理论，将时域中定义的鲁棒性能增益因子，转化频域中相应传递函数的无穷范数进行分析。所取得的主要结论包括：（1）对于前车跟随式的线性匀质队列，其鲁棒指标 AF_{f2l}, AF_{a2a} 均随队列规模呈指数增长，且与线性控制器的增益选择无关，这说明一个微小扰动依然会对队列输出产生巨大影响。（2）对于前车-领航者跟随式的线性匀质队列，其鲁棒指标 AF_{f2l}, AF_{a2a} 至少不随队列规模

增大而增加，这说明与领航车辆通信对改善队列性能具有重要作用。(3) 对于双向跟随式的线性匀质队列，鲁棒指标 AF_{a2a} 随队列规模至少呈多项式 ($O(N^2)$) 增长。相较于前车跟随式而言，双向跟随式的鲁棒指标增长速度已经得到了改善，从鲁棒性能角度说明双向跟随式优于前车跟随式。

最后，针对队列中节点动力学的非线性和异质性问题，提出了一种分布式模型预测控制器设计方法。该控制器利用邻域车辆节点的预测轨迹信息构造子优化问题，仅需要与邻域车辆进行通信而避免了全局通信，能够适用于多种信息流拓扑结构。在该控制器的设计框架下，证明了满足有向生成树的条件时，每个子优化问题的预测终端约束一定会渐近收敛于其期望状态。然后，给出了单个节点代价函数、全部节点代价函数单步迭代的下降值。最后，针对单向信息流下的车辆队列，将全部节点代价函数作为 Lyapunov 函数进行分析，给出了一种保证渐近稳定的充分条件。该条件只需要调整预测控制器中代价函数的惩罚权重矩阵，这为非线性异质队列的分布式控制提供了一种可行的设计方法。

6.2 未来研究展望

下面总结未来研究的一些建议：

(1) 车辆队列的异质化问题。本文对闭环稳定性和鲁棒性能的分析均假定车辆队列线性匀质，而对于异质化的队列，这些性能指标的结论是否依然成立则需要进一步研究。鲁棒控制理论或许是处理异质化问题一种可选择的途径。

(2) 车辆队列的队列稳定性分析。队列稳定性是队列中一个重要性能指标，但本文并没有对该指标进行深入讨论。本文鲁棒性能分析与队列稳定性较为接近，但并不完全一致。对于不同信息流拓扑结构下的车辆队列，其队列稳定性的要求需要进一步研究。

(3) 非对称控制的权衡问题。本文指出 **BD** 结构下的非对称控制可以大幅度改善稳定裕度，然而第 4 章中的仿真指出非对称控制不利于鲁棒性能指标，这说明稳定裕度和鲁棒性能之间存在权衡。可研究的问题有：如何在理论上证明上述结论，其次如何对非对称控制进行改进（比如控制器中只有速度项非对称等）以权衡稳定裕度和鲁棒性能。

(4) 分布式模型预测控制在一般信息流拓扑结构下的分析。对于第 5 章中提出的分布式模型预测控制设计方法，已证明单个子优化问题的预测终端一定会渐近收敛于其期望状态；但目前只针对单向信息流拓扑结构下的车辆队列，证明了该控制器能够保证车辆队列的渐近稳定性。对于一般的信息流拓扑结构，这种设计方法能否保证渐近稳定性，则需要进一步探讨。

参考文献

- [1] Zhang J, Wang F Y, Wang K, et al. Data-driven intelligent transportation systems: A survey[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2011, 12(4): 1624-1639.
- [2] Khattak A J, Al-Deek H. *Intelligent Transportation Systems: Planning, Operations, and Evaluation*[M]. CRC Press, Inc., 2013.
- [3] Li K, Chen T, Luo Y, et al. Intelligent environment-friendly vehicles: Concept and case studies[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2012, 13(1): 318-328.
- [4] Poussot-Vassal C, Sename O, Dugard L, et al. Vehicle dynamic stability improvements through gain-scheduled steering and braking control[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2011, 49(10): 1597-1621.
- [5] Li S, Li K, Rajamani R, et al. Model predictive multi-objective vehicular adaptive cruise control[J]. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2011, 19(3): 556-566.
- [6] Zhang D, Li K, Wang J. A curving ACC system with coordination control of longitudinal car-following and lateral stability[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2012, 50(7): 1085-1102.
- [7] Eben Li S, Li K, Wang J. Economy-oriented vehicle adaptive cruise control with coordinating multiple objectives function[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2013, 51(1): 1-17.
- [8] Li S E, Peng H, Li K, et al. Minimum fuel control strategy in automated car-following scenarios[J]. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 2012, 61(3): 998-1007.
- [9] Li S E, Peng H. Strategies to minimize the fuel consumption of passenger cars during car-following scenarios[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2012, 226(3): 419-429.
- [10] Shi X, Pang X, Mu Y, et al. Emission reduction potential of using ethanol–biodiesel–diesel fuel blend on a heavy-duty diesel engine[J]. *Atmospheric Environment*, 2006, 40(14): 2567-2574.
- [11] Hedrick J K, Tomizuka M, Varaiya P. Control issues in automated highway systems[J]. *Control Systems, IEEE*, 1994, 14(6): 21-32.
- [12] Shladover S E, Desoer C A, Hedrick J K, et al. Automated vehicle control developments in the PATH program[J]. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 1991, 40(1): 114-130.
- [13] Shladover S E. Path at 20-history and major milestones[J]. *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, 2007, 8(4): 584-592.
- [14] Swaroop D, Hedrick J K, Chien C C, et al. A comparison of spacing and headway control laws for automatically controlled vehicles[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1994, 23(1): 597-625.
- [15] Martinez F J, Toh C K, Cano J C, et al. Emergency services in future intelligent transportation systems based on vehicular communication networks[J]. *Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE*, 2010, 2(2): 6-20.

-
- [16] Alam A A, Gattami A, Johansson K H. An experimental study on the fuel reduction potential of heavy duty vehicle platooning[C]//Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2010, 13th International IEEE Conference on. IEEE, 2010: 306-311.
- [17] Browand F, McArthur J, Radovich C. Fuel saving achieved in the field test of two tandem trucks[J]. California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH), 2004.
- [18] Darbha S, Rajagopal K R. Intelligent cruise control systems and traffic flow stability[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 1999, 7(6): 329-352.
- [19] Van Arem B, Van Driel C J G, Visser R. The impact of cooperative adaptive cruise control on traffic-flow characteristics[J]. Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 2006, 7(4): 429-436.
- [20] Horowitz R, Varaiya P. Control design of an automated highway system[J]. Proceedings of the IEEE, 2000, 88(7): 913-925.
- [21] Sheikholeslam S, Desoer C A. Longitudinal control of a platoon of vehicles with no communication of lead vehicle information: a system level study[J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, 1993, 42(4): 546-554.
- [22] Zhou J, Peng H. Range policy of adaptive cruise control vehicles for improved flow stability and string stability[J]. Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 2005, 6(2): 229-237.
- [23] Naus G J L, Vugts R P A, Ploeg J, et al. String-stable CACC design and experimental validation: A frequency-domain approach[J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, 2010, 59(9): 4268-4279.
- [24] Xiao L, Gao F. Practical string stability of platoon of adaptive cruise control vehicles[J]. Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 2011, 12(4): 1184-1194.
- [25] Shaw E, Hedrick J K. String stability analysis for heterogeneous vehicle strings[C]//American Control Conference, 2007. ACC'07. IEEE, 2007: 3118-3125.
- [26] Lestas I, Vinnicombe G. Scalability in heterogeneous vehicle platoons[C]//American Control Conference, 2007. ACC'07. IEEE, 2007: 4678-4683.
- [27] Liang C Y, Peng H. Optimal adaptive cruise control with guaranteed string stability[J]. Vehicle System Dynamics, 1999, 32(4-5): 313-330.
- [28] Stankovic S S, Stanojevic M J, Siljak D D. Decentralized overlapping control of a platoon of vehicles[J]. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 2000, 8(5): 816-832.
- [29] Barooah P, Mehta P G, Hespanha J P. Mistuning-based control design to improve closed-loop stability margin of vehicular platoons[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2009, 54(9): 2100-2113.
- [30] Desjardins C, Chaib-draa B. Cooperative adaptive cruise control: A reinforcement learning approach[J]. Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on, 2011, 12(4): 1248-1260.
- [31] Dunbar W B, Caveney D S. Distributed receding horizon control of vehicle platoons: Stability and string stability[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2012, 57(3): 620-633.

-
- [32] Ploeg J, Shukla D P, van de Wouw N, et al. Controller synthesis for string stability of vehicle platoons[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2014, 15(2): 854-865.
- [33] Coelingh E, Solyom S. All aboard the robotic road train[J]. *Spectrum, IEEE*, 2012, 49(11): 34-39.
- [34] Tsugawa S, Kato S, Aoki K. An automated truck platoon for energy saving[C]//*Intelligent Robots and Systems (IROS), 2011, IEEE/RSJ International Conference on*. IEEE, 2011: 4109-4114.
- [35] Kianfar R, Augusto B, Ebadighajari A, et al. Design and experimental validation of a cooperative driving system in the grand cooperative driving challenge[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2012, 13(3): 994-1007.
- [36] Zheng Y, Li S E, Wang J, et al. Influence of information flow topology on closed-loop stability of vehicle platoon with rigid formation[C]//*Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014, IEEE 17th International Conference on*. IEEE, 2014: 2094-2100.
- [37] Zheng Y, Eben Li S, Wang J, et al. Stability and Scalability of Homogeneous Vehicular Platoon: Study on the Influence of Information Flow Topologies[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2015.
- [38] Willke T L, Tientrakool P, Maxemchuk N F. A survey of inter-vehicle communication protocols and their applications[J]. *Communications Surveys & Tutorials, IEEE*, 2009, 11(2): 3-20.
- [39] Zeadally S, Hunt R, Chen Y S, et al. Vehicular ad hoc networks (VANETS): status, results, and challenges[J]. *Telecommunication Systems*, 2012, 50(4): 217-241.
- [40] Ploeg J, Serrarens A F A, Heijenk G J. Connect & Drive: design and evaluation of cooperative adaptive cruise control for congestion reduction[J]. *Journal of Modern Transportation*, 2011, 19(3): 207-213.
- [41] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215-233.
- [42] 楚天广, 杨正东, 邓魁英, 等. 群体动力学与协调控制研究中的若干问题[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(1): 86-93.
- [43] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model[C]//*ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. ACM, 1987, 21(4): 25-34.
- [44] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical review letters*, 1995, 75(6): 1226.
- [45] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2003, 48(6): 988-1001.
- [46] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [47] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.

-
- [48] Li Z, Duan Z, Chen G, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint[J]. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 2010, 57(1): 213-224.
- [49] Seo J H, Shim H, Back J. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2659-2664.
- [50] Kim H, Shim H, Seo J H. Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2011, 56(1): 200-206.
- [51] Münz U, Papachristodoulou A, Allgöwer F. Delay robustness in consensus problems[J]. *Automatica*, 2010, 46(8): 1252-1265.
- [52] You K, Xie L. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2011, 56(10): 2262-2275.
- [53] Nedic A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2010, 55(4): 922-938.
- [54] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2009, 54(1): 48-61.
- [55] 闵海波, 刘源, 王仕成, 等. 多个体协调控制问题综述[J]. *自动化学报*, 2012, 38(10): 1557-1570.
- [56] Ren W, Cao Y. *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*[M]. Springer Science & Business Media, 2010.
- [57] Mesbahi M, Egerstedt M. *Graph theoretic methods in multiagent networks*[M]. Princeton University Press, 2010.
- [58] Lewis F L, Zhang H, Hengster-Movric K, et al. *Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches*[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [59] Oncu S, Ploeg J, van de Wouw N, et al. Cooperative adaptive cruise control: Network-aware analysis of string stability[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2014.
- [60] di Bernardo M, Salvi A, Santini S. Distributed consensus strategy for platooning of vehicles in the presence of time-varying heterogeneous communication delays[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2014.
- [61] Wang L Y, Syed A, Yin G G, et al. Control of vehicle platoons for highway safety and efficient utility: Consensus with communications and vehicle dynamics[J]. *Journal of systems science and complexity*, 2014, 27(4): 605-631.
- [62] Ghasemi A, Kazemi R, Azadi S. Stable Decentralized Control of a Platoon of Vehicles With Heterogeneous Information Feedback[J]. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 2013, 62(9): 4299-4308.
- [63] Hao H, Barooah P, Mehta P G. Stability margin scaling laws for distributed formation control as a function of network structure[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2011, 56(4): 923-929.

- [64] Hao H, Barooah P. On achieving size-independent stability margin of vehicular lattice formations with distributed control[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2012, 57(10): 2688-2694.
- [65] Bamieh B, Jovanovic M R, Mitra P, et al. Coherence in large-scale networks: Dimension-dependent limitations of local feedback[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2012, 57(9): 2235-2249.
- [66] Rajamani R, Tan H S, Law B K, et al. Demonstration of integrated longitudinal and lateral control for the operation of automated vehicles in platoons[J]. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2000, 8(4): 695-708.
- [67] Lim E H M, Hedrick J K. Lateral and longitudinal vehicle control coupling for automated vehicle operation[C]//*American Control Conference*, 1999. *Proceedings of the 1999. IEEE*, 1999, 5: 3676-3680.
- [68] 高锋. 汽车纵向运动多模型分层切换控制[博士学位论文]. 北京: 清华大学汽车工程系, 2007.
- [69] 李升波. 车辆多目标协调式自适应巡航控制[博士学位论文]. 北京: 清华大学汽车工程系, 2009.
- [70] Swaroop D, Hedrick J K. String stability of interconnected systems[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1996, 41(3): 349-357.
- [71] Kwon J W, Chwa D. Adaptive Bidirectional Platoon Control Using a Coupled Sliding Mode Control Method[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2014.
- [72] 施继忠, 宋乾坤, 张继业等. 具有随机干扰的时滞车辆跟随控制[J]. *应用数学和力学*, 2014, 35(10): 1115-1123.
- [73] 施继忠. 随机车辆纵向跟随系统的稳定性分析与控制[博士学位论文], 成都: 西南交通大学, 2011.
- [74] Yue W, Guo G. Guaranteed cost adaptive control of nonlinear platoons with actuator delay[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134(5).
- [75] Lin F, Fardad M, Jovanovic M R. Optimal control of vehicular formations with nearest neighbor interactions[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2012, 57(9): 2203-2218.
- [76] Lin F, Fardad M, Jovanovic M R. Algorithms for leader selection in stochastically forced consensus networks[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2013 59(7):1789:1802
- [77] Fardad M, Lin F, Jovanovic M R. Sparsity-promoting optimal control for a class of distributed systems[C]//*American Control Conference (ACC)*, 2011. *IEEE*, 2011: 2050-2055.
- [78] Darbha S, Pagilla P R. Limitations of employing undirected information flow graphs for the maintenance of rigid formations for heterogeneous vehicles[J]. *International journal of engineering science*, 2010, 48(11): 1164-1178.
- [79] Eyre J, Yanakiev D, Kanellakopoulos I. A Simplified Framework for String Stability Analysis of Automated Vehicles[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1998, 30(5): 375-405.
- [80] Peters A A, Middleton R H, Mason O. Leader tracking in homogeneous vehicle platoons with broadcast delays[J]. *Automatica*, 2014, 50(1): 64-74.

-
- [81] Knorn S, Donaire A, Agüero J C, et al. Passivity-based control for multi-vehicle systems subject to string constraints[J]. *Automatica*, 2014, 50(12): 3224-3230.
- [82] Hao H, Barooah P. Control of large 1D networks of double integrator agents: role of heterogeneity and asymmetry on stability margin[C]//Decision and Control (CDC), 2010, 49th IEEE Conference on. IEEE, 2010: 7395-7400.
- [83] Hao H, Barooah P. Stability and robustness of large platoons of vehicles with double - integrator models and nearest neighbor interaction[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(18): 2097-2122.
- [84] Guo G, Yue W. Hierarchical platoon control with heterogeneous information feedback[J]. *IET control theory & applications*, 2011, 5(15): 1766-1781.
- [85] Seiler P, Pant A, Hedrick K. Disturbance propagation in vehicle strings[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2004, 49(10): 1835-1842.
- [86] Barooah P, Hespanha J P. Error amplification and disturbance propagation in vehicle strings with decentralized linear control[C]//Decision and Control, 2005 and 2005, European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on. IEEE, 2005: 4964-4969.
- [87] Middleton R H, Braslavsky J H. String instability in classes of linear time invariant formation control with limited communication range[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2010, 55(7): 1519-1530.
- [88] Klinge S, Middleton R H. Time headway requirements for string stability of homogeneous linear unidirectionally connected systems[C]//Decision and control, Proceedings of the 48th IEEE conference on. IEEE, 2009: 1992-1997.
- [89] Zhang Y, Kosmatopoulos E B, Ioannou P A, et al. Using front and back information for tight vehicle following maneuvers[J]. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 1999, 48(1): 319-328.
- [90] Guo G, Yue W. Autonomous platoon control allowing range-limited sensors[J]. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 2012, 61(7): 2901-2912.
- [91] Ploeg J, van de Wouw N, Nijmeijer H. Lp string stability of cascaded systems: Application to vehicle platooning[J]. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2014, 22(2): 786-793.
- [92] Ghasemi A, Kazemi R, Azadi S. Stability analysis of bidirectional adaptive cruise control with asymmetric information flow[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, 229(2): 216-226.
- [93] Fax J A, Murray R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2004, 49(9): 1465-1476.
- [94] Swaroop D, Hedrick J K. Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems[J]. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 1999, 121(3): 462-470.
- [95] Santhanakrishnan K, Rajamani R. On spacing policies for highway vehicle automation[J]. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 2003, 4(4): 198-204.

-
- [96] Liu X, Goldsmith A, Mahal S S, et al. Effects of communication delay on string stability in vehicle platoons[C]//Intelligent Transportation Systems, 2001. Proceedings. 2001. IEEE, 2001: 625-630.
- [97] Kianfar R, Falcone P, Fredriksson J. A receding horizon approach to string stable cooperative adaptive cruise control[C]//Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2011, 14th International IEEE Conference on., 2011: 734-739.
- [98] Sai Krishna Y, Darbha S, Rajagopal K R. Information flow and its relation to the stability of the motion of vehicles in a rigid formation[C]//American Control Conference, 2005. Proceedings of the IEEE, 2005: 1853-1858.
- [99] Zheng Y, Li S, Li K, Wang J, Wang L, Stability Margin Improvement of Vehicular Platoon considering Undirected Topology and Asymmetric Control, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, submitted.
- [100] Khatir M E, Davidson E J. Bounded stability and eventual string stability of a large platoon of vehicles using non-identical controllers[C]//Decision and Control, CDC. 43rd IEEE Conference on. IEEE, 2004, 1: 1111-1116.
- [101] Khatir M E, Davison E J. Decentralized control of a large platoon of vehicles using non-identical controllers[C]//American Control Conference, 2004. Proceedings of the IEEE, 2004, 3: 2769-2776.
- [102] Seiler P, Sengupta R. Analysis of communication losses in vehicle control problems[C]//American Control Conference, 2001. Proceedings of the IEEE, 2: 1491-1496.
- [103] Seiler P, Sengupta R. An H_∞ approach to networked control[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2005, 50(3): 356-364.
- [104] Patterson S, Bamieh B. Leader selection for optimal network coherence[C]//Decision and Control (CDC), 49th IEEE Conference on. IEEE, 2010: 2692-2697.
- [105] Fardad M, Lin F, Jovanovic M R. Sparsity-promoting optimal control for a class of distributed systems[C]//American Control Conference (ACC), IEEE, 2011: 2050-2055.
- [106] Lin F, Fardad M, Jovanovic M R. Algorithms for leader selection in stochastically forced consensus networks[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2013: 59(7) 1789-1802.
- [107] Herman I, Martinec D, Hurák Z, et al. Harmonic instability of asymmetric bidirectional control of a vehicular platoon[C]//American Control Conference (ACC), IEEE, 2014: 5396-5401.
- [108] Herman I, Martinec D, Hurák Z, et al. Nonzero bound on Fiedler eigenvalue causes exponential growth of H-infinity norm of vehicular platoon[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on 2015.
- [109] Martinec D, Herman I, Hurák Z, et al. Wave-absorbing vehicular platoon controller[J]. European Journal of Control, 2014, 20(5): 237-248.
- [110] Godsil C D, Royle G, Godsil C D. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer, 2001.
- [111] Brouwer A E, Haemers W H. Spectra of graphs[M]. Springer Science & Business Media, 2011.

-
- [112] Seyboth G S, Dimarogonas D V, Johansson K H, et al. On robust synchronization of heterogeneous linear multi-agent systems with static couplings[J]. *Automatica*, 2015, 53: 392-399.
- [113] Wang X, Saberi A, Stoorvogel A A, et al. Consensus in the network with uniform constant communication delay[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2461-2467.
- [114] Irving R S. *Integers, polynomials, and rings: a course in algebra*[M]. Springer Science & Business Media, 2003.
- [115] Demmel J W. *Applied numerical linear algebra*[M]. Siam, 1997.
- [116] Ni W, Cheng D. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(3): 209-217.
- [117] Zhang H, Lewis F L, Das A. Optimal design for synchronization of cooperative systems: state feedback, observer and output feedback[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 2011, 56(8): 1948-1952.
- [118] Willems J C. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation[J]. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 1971, 16(6): 621-634.
- [119] Wang X, Saberi A, Stoorvogel A A, et al. Consensus in the network with uniform constant communication delay[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2461-2467.
- [120] Seo J H, Shim H, Back J. Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2659-2664.
- [121] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [122] Yu-Geng X I, De-Wei L I, Shu L. Model predictive control—status and challenges[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222-236.
- [123] Negenborn R, Maestre J. Distributed model predictive control: an overview and roadmap of future research opportunities[J]. *Control Systems, IEEE*, 2014, 34(4): 87-97.
- [124] Christofides P D, Scattolini R, de la Pena D M, et al. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2013, 51: 21-41.
- [125] Chen H, Allgöwer F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability[J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205-1217.
- [126] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [127] Dunbar W B, Murray R M. Distributed receding horizon control for multi-vehicle formation stabilization[J]. *Automatica*, 2006, 42(4): 549-558.
- [128] Keviczky T S, Borrelli F, Balas G J. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems[J]. *Automatica*, 2006, 42(12): 2105-2115.

- [129] Keviczky T, Borrelli F, Fregene K, et al. Decentralized receding horizon control and coordination of autonomous vehicle formations[J]. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 2008, 16(1): 19-33.
- [130] Jianqiang Wang, Shengbo Eben Li, Yang Zheng, Xiaoyun Lu. Longitudinal collision mitigation via coordinated braking of multiple vehicles using model predictive control. *Integrated Computer-Aided Engineering*. 2015, 22(2), pp. 171-185.
- [131] Horn R A, Johnson C R. *Matrix analysis*[M]. Cambridge university press, 2012.
- [132] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 清华大学出版社, 2004.
- [133] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 科学出版社, 2006.
- [134] Shivakumar P N, Chew K H. A sufficient condition for nonvanishing of determinants[J]. *Proceedings of the American mathematical society*, 1974: 63-66.
- [135] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 清华大学出版社, 2008.
- [136] 吴麒, 王诗宓. 自动控制原理 (下册) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [137] Zhang J, Knospe C R, Tsiotras P. New results for the analysis of linear systems with time - invariant delays[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(12): 1149-1175.

致 谢

在本人硕士阶段的学习、科研和生活中，始终受到导师李克强教授、王建强副教授和李升波副教授的指导和帮助。在此，向三位老师表达由衷的敬意与感谢！

李克强老师为人处事中的国际化视野和全局观念、学术科研上的渊博知识和严谨态度极大地影响了我，特别是他始终把学生培养放在工作第一位的风范令我深深感动。王建强老师谦和无私的处事风范、勤于律己的工作作风亦令我受益良多。李升波老师对学术前沿准确把握的方法、对科研工作精益求精的态度、对学生科研无私指导的作风让我获益匪浅，都在我学习科研中打下了深深的烙印。

特别感谢清华大学智能交通与车辆控制课题组的全体同学在科研和生活上的帮助和支持。课题组积极向上的科研氛围、互助互进的团队精神让我在快乐的学习科研中成长和进步。感谢党睿娜、秦晓辉、丁洁云、李晓飞、张放、徐彪等同学对本论文工作提出的宝贵意见。

最后，感谢我的父母和女友在我求学期间的鼓励和支持，我永远爱你们！

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____日 期：_____

附录 A 矩阵理论相关结论

本章介绍矩阵理论中一些基础知识和常见性质，包括矩阵特征值及其标准型、向量和矩阵范数、以及常见的特征值不等式。关于矩阵理论更详细的介绍，可参见 Horn^[131]，张贤达等^[132]，王松桂等^[133]。

首先，给出本文出现的符号定义。

实数域和复数域分别用 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 表示；一个复数 $s \in \mathbb{C}$ 的实部表示为 $\operatorname{Re}(s)$ ，其虚部表示为 $\operatorname{Im}(s)$ 。实数域 \mathbb{R} 上所有 $m \times n$ 矩阵集合表示为 $\mathbb{R}^{m \times n}$ ，复数域 \mathbb{C} 上所有 $m \times n$ 矩阵集合表示为 $\mathbb{C}^{m \times n}$ ；当 $m = n$ 时，称为方阵；单位矩阵用 \mathbf{I} 表示。一个向量或矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的转置表示为 $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ； $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 的共轭转置表示为 $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 。当 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ 时，称 \mathbf{A} 为对称矩阵 (symmetric matrix)； $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ 时，称 \mathbf{A} 为 Hermite 矩阵。方阵 \mathbf{A} 的行列式表示为 $\det(\mathbf{A})$ ，迹表示为 $\operatorname{Tr}(\mathbf{A})$ 。若方阵 \mathbf{A} 的行列式不为零（满秩），则称 \mathbf{A} 为非奇异矩阵。

一个对称矩阵 \mathbf{A} 称为正定矩阵，若 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ ，记为 $\mathbf{A} > 0$ ；称为半正定矩阵，若 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ ，记为 $\mathbf{A} \geq 0$ ；称为负定矩阵，若 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ ，记为 $\mathbf{A} < 0$ ；称为半负定矩阵，若 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ ，记为 $\mathbf{A} \leq 0$ ；称为不定矩阵，若 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 取值可能为正，也可能为负。

令 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ，则 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 表示矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的 Kronecker 积，定义为

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & \cdots & a_{1n} \mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \mathbf{B} & \cdots & a_{mn} \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

下面给出关于 Kronecker 积常用的性质^[132]：

- 1) 若 α 和 β 为常数，则 $(\alpha \mathbf{A}) \otimes (\beta \mathbf{B}) = \alpha \beta (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ ；
- 2) 对于矩阵维数合适的矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ，有

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \pm \mathbf{A} \otimes \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}),$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T, (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

- 3) 假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ， $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 \mathbf{A} 的特征根， $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 为矩阵 \mathbf{B} 的特征根，则 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 的特征根为 $\lambda_i \mu_j, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ 。

A.1 矩阵的特征值及约当标准型

定义 A-1. (矩阵特征值) 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若存在一个标量 λ 以及一个非零向量 \mathbf{x} 满足

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{C} \quad (\text{A-1})$$

则 λ 称为矩阵 \mathbf{A} 的一个特征值 (eigenvalue), \mathbf{x} 称为对应于 λ 的一个特征向量 (eigenvector)。

矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值组成的集合, 称为矩阵 \mathbf{A} 的谱 (spectrum), 记为 $S(\mathbf{A})$, 相应谱半径定义为 $\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda|: \lambda \in S(\mathbf{A})\}$ 。矩阵 \mathbf{A} 的特征根也可通过求解其特征方程 (characteristic equation) $|\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}| = 0$ 得到。此外, 对称矩阵的正定性和半正定性等都可以用特征值进行描述^[132]:

- 1) 正定矩阵: 所有特征根均为正实数;
- 2) 半正定矩阵: 所有特征根均为非负实数;
- 3) 负定矩阵: 所有特征根均为负实数;
- 3) 不定矩阵: 特征根中有些为正实数, 有些为负实数。

引理 A-1^[131] 对于任意可逆的 n 阶方阵 \mathbf{A} , 有

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{A}), \text{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{A}). \quad (\text{A-2})$$

显然, 若 \mathbf{A} 有零特征根, 则 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 即矩阵 \mathbf{A} 奇异。反之, 若 \mathbf{A} 所有特征根均不为零, 则 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 即矩阵 \mathbf{A} 非奇异。

引理 A-2^[133] 对于任意 n 阶方阵 \mathbf{A} , 有

$$\lambda(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{A})}. \quad (\text{A-3})$$

其中, $\lambda(\mathbf{A})$ 表示 \mathbf{A} 的特征值。进一步, 若 \mathbf{A} 的特征值全为实数, 且排序为 $\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \lambda_2(\mathbf{A}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{A})$, 则

$$\lambda_k(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{n-k+1}(\mathbf{A})}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A-4})$$

定义 A-2. (相似矩阵与相似变换) 矩阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的相似矩阵, 若存在一非奇异矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 。此时, 线性变换 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 称为矩阵 \mathbf{A} 的相似变换。

下面给出相似矩阵的重要性质^{[132][133]}:

- 1) 相似矩阵具有相同的特征值 (包括代数重数), 相同的迹, 相同的行列式;

- 2) n 阶方阵 A 相似于对角矩阵, 当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量;
 3) 若方阵 A 的特征值互不相同, 则 A 一定相似于对角阵。

下面, 仅针对上述性质 (2) 进行说明。假设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ 为矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量, 即有

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A-5})$$

这一方程也可写为

$$A[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A-6})$$

定义 $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n], \Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 则有

$$AU = U\Sigma. \quad (\text{A-7})$$

由于 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ 线性无关, 所以 U 可逆, 从而

$$U^{-1}AU = \Sigma. \quad (\text{A-8})$$

即存在 n 个线性无关的特征向量, A 一定可以相似对角化。若矩阵 A 通过相似变换得到对角矩阵, 称 A 可对角化 (diagonalizable)。

定义 A-3. (约当标准型) 矩阵 J 被称为是约当标准型 (Jordan canonical form), 如果

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{bmatrix},$$

其中, 每个对角块 J_i 是一个方阵, 称为一个约当块, 形式如下:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

引理 A-3^[133] 对于任意 n 阶方阵 A , 均存在可逆矩阵 P , 将方阵 A 通过相似变换, 相似为其约当标准型

$$P^{-1}AP = J \quad (\text{A-9})$$

其中, 每个约当块的对角元素为矩阵 A 的特征值。

下面阐述约当标准型的一些性质^[131]:

- 1) 矩阵 J 的特征值为其对角元素;

- 2) λ_i 的几何重数 (geometric multiplicity) 是对应于 λ_i 的约当块个数;
- 3) λ_i 的代数重数 (algebraic multiplicity) 是对应于 λ_i 约当块的阶数之和;
- 4) 矩阵 A 可对角化, 当且仅当 A 的每个特征值的几何重数和代数重数相同。

定义 A-4. (矩阵奇异值) 令 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 且记 A^*A 的 n 个特征值为 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则称 λ_i 的算术平方根 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, n$ 为矩阵 A 的奇异值。

显然 A^*A 为半正定矩阵, 其特征值均为非负数, 因此奇异值均为非负数。下面阐述著名的矩阵奇异值分解定理。

引理 A-4^[133] 令 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 或 $(\mathbb{C}^{m \times n})$, 则存在正交 (或酉) 矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 或 $(\mathbb{C}^{m \times m})$ 和 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 或 $(\mathbb{C}^{n \times n})$, 使得

$$A = U\Sigma V^T \quad (\text{或 } U\Sigma V^*) \quad (\text{A-10})$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$$

对角元素排列为: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r, r = \text{rank}(A)$ 。

数值 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ 以及 $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n$ 为矩阵 A 的奇异值。

A.2 向量和矩阵的范数

范数是线性空间中的一种度量。从几何意义上讲, 向量的范数表达的是向量的长度; 矩阵则可以视为向量空间之间的映射, 其范数表达了向量在映射过程中, 向量长度被放大或缩小的一种“增益”。本节给出常见向量和矩阵范数的定义。

定义 A-5. (向量范数) 令 $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, 若定义 x 的一个实值函数, 记为 $\|x\|$ 。若满足下面的条件:

- 1) 非负性: $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ 。 $\|x\| = 0$, 当且仅当 $x = 0$;
- 2) 齐次性: $\|kx\| = |k|\|x\|, \forall k \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$;
- 3) 三角不等式 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$;

则称实函数 $\|x\|$ 为向量 x 的范数。

记 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, 几种常见的向量范数定义如下:

(1) L_1 范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (\text{A-11})$$

(2) L_2 范数 (常称为 Euclidean 范数, 也称为 Frobenius 范数)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-12})$$

(3) L_∞ 范数

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (\text{A-13})$$

(4) L_p 范数

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A-14})$$

关于任意两种向量范数如下的关系： $\|\mathbf{x}\|_\alpha$ 和 $\|\mathbf{x}\|_\beta$ 是定义在 $\mathbb{C}^{n \times 1}$ 上的任意两种范数，则存在正数 $k_2 > k_1 > 0$ ，使得 $k_1 \|\mathbf{x}\|_\beta \leq \|\mathbf{x}\|_\alpha \leq k_2 \|\mathbf{x}\|_\beta, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ 。

定义 A-6. (矩阵范数) 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ，若定义 \mathbf{A} 的一个实值函数，记为 $\|\mathbf{A}\|$ 。若满足下面的条件：

- 1) 非负性： $\|\mathbf{A}\| \geq 0, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 。 $\|\mathbf{A}\| = 0$ ，当且仅当 \mathbf{A} 为零矩阵；
- 2) 齐次性： $\|k\mathbf{A}\| = |k| \|\mathbf{A}\|, \forall k \in \mathbb{C}, \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ；
- 3) 三角不等式： $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ；
- 4) 相容性：当矩阵 \mathbf{AB} 有意义时，有 $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ 。

则称实函数 $\|\mathbf{A}\|$ 为矩阵 \mathbf{A} 的范数。

根据条件 4)，对于任意的范数，若矩阵 \mathbf{A} 可逆，均有 $\|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{AA}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ ，即可得到 $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ 的一个下界：

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{\|\mathbf{I}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \quad (\text{A-15})$$

矩阵的范数有两种主要的类型：诱导范数和元素形式范数。

(1) 诱导范数

诱导范数又称为矩阵空间上的算子范数 (operator norm)，定义为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \max\{\|\mathbf{Ax}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \|\mathbf{x}\| = 1\} \\ &= \max\left\{ \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \mathbf{x} \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

式(A-16)定义的任意诱导范数，均有 $\|\mathbf{I}\| = 1, \|\mathbf{Ay}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ 。常用的诱导范数为 p -范数，即

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}. \quad (\text{A-17})$$

p -范数也称为 L_p 范数。特别地，当 $p = 1, 2, \infty$ 时，对应的诱导范数分别为：

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|. \quad (\text{A-18})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}). \quad (\text{A-19})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A-20})$$

其中， $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ 为矩阵 \mathbf{A} 的最大奇异值。

诱导 L_1 范数和诱导 L_∞ 范数也分别称为绝对列和范数和绝对行和范数。诱导 L_2 范数习惯称为谱范数 (spectrum norm)。

(2) 元素形式范数

将 $m \times n$ 矩阵按照列排列成一个 $mn \times 1$ 向量，然后可以采用向量的范数定义，得到矩阵的范数，这种形式称为元素形式范数，如下：

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A-21})$$

以下是三种典型的元素形式 p -范数：

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A-22})$$

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-23})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|. \quad (\text{A-24})$$

$p = 2$ 时，称为 Frobenius 范数，也可以视为 Euclidean 范数在矩阵上面的推广。
 $p = \infty$ 时， $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 也常记为 $\|\mathbf{A}\|_{\max}$ 。注意到矩阵 \mathbf{A} 的 Frobenius 范数 $\|\mathbf{A}\|_F$ 是酉不变的，即 $\|\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{V}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F$ ，所以以下引理。

引理 A-5^[133] 令 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 则，

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{V}\|_F = \|\boldsymbol{\Sigma}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}. \quad (\text{A-25})$$

$$|\det(\mathbf{A})| = |\det(\boldsymbol{\Sigma})| = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \quad (\text{A-26})$$

其中, $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, r$ 为矩阵 \mathbf{A} 的奇异值。

与向量范数之间关系类似, 任给 $\|\mathbf{A}\|_\alpha$ 和 $\|\mathbf{A}\|_\beta$ 是定义在 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的任意两种范数, 则存在正数 $k_2 > k_1 > 0$, 使得 $k_1 \|\mathbf{A}\|_\beta \leq \|\mathbf{A}\|_\alpha \leq k_2 \|\mathbf{A}\|_\beta, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 。从这一关系上说, 向量和矩阵空间中的任意范数之间是等价的。

进一步的, 不同类型范数之间的有如下的不等式关系。

引理 A-6^[133] 任给矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 设其秩为 r , 则下列不等式成立:

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{r} \|\mathbf{A}\|_2. \quad (\text{A-27})$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{mn} \|\mathbf{A}\|_{\max}. \quad (\text{A-28})$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{m} \|\mathbf{A}\|_\infty. \quad (\text{A-29})$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbf{A}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|_1. \quad (\text{A-30})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty}. \quad (\text{A-31})$$

其中, $\|\mathbf{A}\|_p$ 为矩阵诱导范数。另外, 给定任意矩阵范数, 均有

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|. \quad (\text{A-32})$$

A.3 常用的特征值不等式

本节给出常见的特征值不等式。

引理 A-7^[131] (**Geršgorin 圆盘定理**) 给定一个矩阵 $\mathbf{Q} = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 \mathbf{Q} 的所有特征根均落在下面的 n 圆盘的并集里面:

$$\bigcup_{i=1}^n \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}|\}. \quad (\text{A-33})$$

引理 A-8^[134] 给定一个矩阵 $\mathbf{Q} = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 及集合

$$J = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid |q_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}|\} \neq \emptyset. \quad (\text{A-34})$$

若 $\forall i \notin J$, 存在 \mathbf{Q} 中的一个非零元素序列 $\{q_{ii_1}, q_{i_1 i_2}, \dots, q_{i_r j}\}$, 其中 $j \in J$ 。则, 矩阵 \mathbf{Q} 非奇异。

引理 A-9^[115] (**Cauchy 特征根交错定理**) 给定矩阵

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \left(\text{or } \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_1 & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \right)$$

为对称矩阵，其中 \mathbf{D} 为 $(n-1) \times (n-1)$ 的对称矩阵。令 $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$ 为矩阵 $\tilde{\mathbf{D}}$ 的特征根， $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1}$ 为矩阵 \mathbf{D} 的特征根，则有

$$\gamma_1 \leq \beta_1 \leq \dots \leq \beta_i \leq \gamma_i \leq \beta_{i+1} \leq \gamma_{i+1} \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq \gamma_n. \quad (\text{A-35})$$

引理 A-10^[133] (**Rayleigh-Ritz 定理**) 给定对称矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ，有

$$\lambda_{\max}(\mathbf{Q}) = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) = \min_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (\text{A-36})$$

从几何上看，式 (A-36) 可解释为矩阵 \mathbf{Q} 的最大和最小特征值分别为二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 在单位球 $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ 上的最大值和最小值。根据 **Rayleigh-Ritz 定理** 可知，设 $\mathbf{Q} = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称矩阵，有 $\sigma_{\min}(\mathbf{Q}) \leq q_{ii} \leq \sigma_{\max}(\mathbf{Q}), i = 1, 2, \dots, n$ 。

引理 A-11^[133] 给定对称矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，有

$$\lambda_i(\mathbf{A}) + \lambda_n(\mathbf{B}) \leq \lambda_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \lambda_i(\mathbf{A}) + \lambda_1(\mathbf{B}), i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{A-37})$$

其中 $\lambda_i(\mathbf{A})$ 为矩阵 \mathbf{A} 的第 i 个特征根，且排序为 $\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathbf{A})$ 。

由引理 A-11 易知，给定对称矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若 $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ ，则 $\lambda_i(\mathbf{A}) \geq \lambda_i(\mathbf{B}), i = 1, 2, \dots, n$ 。

附录 B 控制理论相关结论

本节介绍控制理论中一些基础知识和常见结论，包括函数的范数、线性时不变系统的稳定性、Lyapunov 稳定性以及代数 Riccati 方程。本节内容参考了梅生伟等^[135]和吴麒等^[136]。

B.1 函数的范数

一个动态系统可以看成是从一个函数空间到另一个函数空间的映射，即算子。对函数空间引入范数来表征空间中元素（即函数，工程上为一种具体的信号）的强度，则系统作为算子时的范数就反映了系统在传递信号过程中的一种增益^[135]。

下面给出几类常见的函数空间：

(1) L_p 空间 ($p \in [1, \infty)$): 满足以下条件的可测函数 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的全体所构成的集合，

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty. \quad (\text{B-1})$$

(2) L_∞ 空间: 在 $[0, \infty)$ 有上确界的可测函数 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 的全体所构成的集合，即

$$\sup_{t>0} |f(t)| < \infty. \quad (\text{B-2})$$

(3) H_2 空间: 在复平面的闭右半平面解析，且满足以下条件的复变函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的全体所构成的集合，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega < \infty. \quad (\text{B-3})$$

(4) H_∞ 空间: 在复平面的闭右半平面解析，且在虚轴上其模有上界的复变函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的全体所构成的集合，即

$$\sup_{\omega} |f(j\omega)| < \infty. \quad (\text{B-4})$$

针对上述函数空间，下面介绍几类常见的函数范数。

(1) L_p 范数

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f(t) \in L_p. \quad (\text{B-5})$$

(2) L_∞ 范数

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{t>0} |f(t)|, \quad f(t) \in L_\infty. \quad (\text{B-6})$$

(3) H_2 范数

$$\|f\|_{H_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f(t) \in H_2. \quad (\text{B-7})$$

(4) H_∞ 范数 (标量函数空间)

$$\|f\|_{H_\infty} = \sup_{\omega} |f(j\omega)|, \quad f(t) \in H_\infty. \quad (\text{B-8})$$

(5) H_∞ 范数 (矩阵函数空间)

$$\|T\|_{H_\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[T(j\omega)], \quad T \in H_\infty^{m \times n}. \quad (\text{B-9})$$

关于上述范数, 一个重要等式关系由 Parseval 定理给出, 即 $\forall f(t) \in L_2^n, F(s) = \mathcal{L}(f(t))$, 则有

$$\|f(t)\|_{L_2} = \|F(s)\|_{H_2}. \quad (\text{B-10})$$

引理 B-1^[135] 稳定系统 $G(s)$ 的输入是 $u(t)$, 输出为 $y(t)$, 则有

$$\|G(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\|u(t)\|_{L_2} \neq 0} \frac{\|y(t)\|_{L_2}}{\|u(t)\|_{L_2}}. \quad (\text{B-11})$$

该引理说明对于所有能量有界的输入, 系统输出信号的能量与输入信号的能量之比的上界等于传递函数的 H_∞ 范数。

B.2 Lyapunov 稳定性

给定一个非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t), \quad (\text{B-12})$$

其中, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ 为状态向量, \mathcal{D} 为包含原点的开集, $t \in \mathbb{R}$ 为时间参量, 函数 $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 \mathcal{D} 上连续。假设 f 有一个平衡点 \boldsymbol{x}_e , 即 $f(\boldsymbol{x}_e, t) = 0$ 。记初始条件下 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$, 系统 (B-12) 的解为 $\boldsymbol{x}(t) = \phi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 。则,

1) 平衡点 \boldsymbol{x}_e 为 Lyapunov 稳定; 若 $\forall \epsilon > 0$, 存在一个实数 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, 当 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| < \delta(\epsilon, t_0)$, 则对所有时间 $t > t_0$, 有 $\|\phi(t; t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}_e\| < \epsilon$;

2) 平衡点 \mathbf{x}_e 为渐近稳定 (asymptotically stable); 若 \mathbf{x}_e 为 Lyapunov 稳定, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| = 0;$$

3) 平衡点 \mathbf{x}_e 为指数稳定 (exponentially stable); 若 \mathbf{x}_e 为渐近稳定, 且存在 $\alpha, \beta > 0$,

$$\|\phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| e^{-\beta t}, t \geq 0.$$

下面给出连续、离散情况下的 Lyapunov 稳定性第二方法。

引理 B-2^[136] 给定一个没有外部定常系统的动态方程和平衡状态

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}_e = 0. \quad (\text{B-13})$$

假定找到一个单值标量函数 $V(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V(\mathbf{x})$ 对个状态分量均具有一阶连续偏导数。若

1) $V(\mathbf{x})$ 为正定, 即 $V(\mathbf{x}) \geq 0$, 当且仅当 $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负定, 即 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, 当且仅当 $\dot{V}(0) = 0$;

则 $\mathbf{x}_e = 0$ 为局部渐近稳定的平衡状态。称 $V(\mathbf{x})$ 是该系统的一个 Lyapunov 函数。

3) 若 $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$, 则 $\mathbf{x}_e = 0$ 为全局渐近稳定的平衡状态。

引理 B-3^[136] 给定一个没有外部定常离散系统的动态方程和平衡状态

$$\mathbf{x}(k+1) = f[\mathbf{x}(k)], \mathbf{x}_e = 0. \quad (\text{B-14})$$

假定找到一个单值标量函数 $V(\mathbf{x}(k)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若

1) $V[\mathbf{x}(k)]$ 为正定;

2) $\Delta V[\mathbf{x}(k)] = V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)]$ 为负定;

则 $\mathbf{x}_e = 0$ 为局部渐近稳定的平衡状态。称 $V[\mathbf{x}(k)]$ 是该系统的一个 Lyapunov 函数。

3) 若 $\lim_{\|\mathbf{x}(k)\| \rightarrow \infty} V[\mathbf{x}(k)] = \infty$, 则 $\mathbf{x}_e = 0$ 为全局渐近稳定的平衡状态。

除了 Lyapunov 稳定性, 另外一种常用的稳定性定义为输入输出稳定性 (bounded-input bounded-output stability, BIBO)。BIBO 稳定性要求对系统施加有界输入时, 系统输出要有界。数学表达为

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq c < \infty \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| \leq M < \infty. \quad (\text{B-15})$$

对于线性时不变系统而言, Lyapunov 稳定性和 BIBO 稳定性等价。

B.3 线性时不变系统的稳定性

一个线性时不变 (linear time-invariant) 系统的状态空间方程表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{B-16}$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为输出向量, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为系数矩阵。当只考虑输入输出关系时, 可用传递函数矩阵来表示,

$$\frac{\mathcal{L}(\mathbf{y}(t))}{\mathcal{L}(\mathbf{u}(t))} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.\tag{B-17}$$

式 (B-17) 是假定零初始和条件下, 对式 (B-16) 进行拉普拉斯变换得到的。传递函数矩阵中 (i, j) 元素表示第 j 个输入与第 i 个输出之间的传递函数。

式 (B-16) 的解可解析地表示为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,\tag{B-18}$$

其中, $e^{\mathbf{A}t}$ 称为状态转移矩阵。假设输入 $\mathbf{u} = 0$ 时, 采用相似变换, $\mathbf{z} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$, 则 $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{J}\mathbf{z}$, 其中 \mathbf{J} 为矩阵 \mathbf{A} 的约当标准型, 则有

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_l t} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

当输入 $\mathbf{u} = 0$ 时, 系统 (B-16) 渐近稳定当且仅当矩阵 \mathbf{A} 是 Hurwitz 矩阵, 即其特征根均落在左半开平面中。

也可用 Lyapunov 方法对线性系统稳定性进行分析, 取函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{P} > 0$, 则 $V(\mathbf{x})$ 为一个正定函数。此时, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}$, 其中

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}.\tag{B-19}$$

该矩阵方程称为连续系统的 Lyapunov 方程。若 $\mathbf{Q} > 0$, 根据 Lyapunov 稳定性判定方法, 当输入 $\mathbf{u} = 0$ 时, 系统 (B-16) 渐近稳定。任给正定矩阵 \mathbf{Q} , Lyapunov 方程 (B-19) 有正定解 \mathbf{P} 与系统矩阵 \mathbf{A} 的稳定性等价。

下面给出一个带时延系统的稳定性判据。

引理 B-4^[137] 给定一个带时延的线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(t - \gamma).\tag{B-20}$$

假定 $\mathbf{A} + \mathbf{A}_d$ 为 Hurwitz, 则系统 (B-20) 对于 $\gamma \in [0, \gamma^*]$ 渐近稳定, 若

$$\det[j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A} - e^{-j\omega\gamma}\mathbf{A}_d] \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in [0, \gamma^*].\tag{B-21}$$

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1992年2月27日生于广西壮族自治区桂林市。

2009年9月考入清华大学汽车工程系车辆工程专业，2013年7月本科毕业并获得工学学士学位。

2013年9月免试进入清华大学汽车工程系机械工程专业，攻读工学硕士学位至今。

发表的学术论文

- [1] **Zheng Yang**, Li Eben Shengbo, Wang Jianqiang, Cao Dongpu, Li Keqiang. Stability and Scalability of Homogeneous Vehicular Platoon: Study on the Influence of Information Flow Topologies. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2015. (已录用, SCI 源刊)
- [2] **Zheng Yang**, Li Eben Shengbo, Wang Jianqiang, Wang Le-Yi, Li Keqiang. Influence of information flow topology on closed-loop stability of vehicle platoon with rigid formation. In *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on*, pp. 2094-2100, Qingdao, China. (国际会议最佳学生论文奖)
- [3] **Zheng Yang**, Wang Jianqiang, Li Xiaofei, Yu Chenfei, Kenji Kodaka, Li Keqiang. Driving risk assessment using cluster analysis based on naturalistic driving data. In *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on*, pp. 2584-2589, Qingdao, China.
- [4] **Zheng Yang**, Li Eben Shengbo, Xu Biao, Li Keqiang, Wang Jianqiang. Complexity Analysis of Green Light Optimal Velocity Problem: An NP-complete Result for Binary Speed Choices. In *14th Intelligent Transportation Systems Asia Pacific Forum*, 2015, Nanjing, China. (国际会议最佳论文奖)
- [5] Li Eben Shengbo, **Zheng Yang**, Li Keqiang, Wang Jianqiang. An Overview of Vehicular Platoon Control under the Four-component Framework. In *26th Intelligent Vehicle Symposium*, IEEE proceedings, 2015, Seoul, Korea. (已录用)
- [6] Li Eben Shengbo, **Zheng Yang**, Li Keqiang, Wang Jianqiang. Scalability Limitations of Homogeneous Vehicular Platoon with Rigid Formation under Undirected Information Flow Topologies. In *34th Chinese Control Conference (CCC)*, 2015, Hang Zhou, China. (已录用)

- [7] Wang Jianqiang, Li Eben Shengbo, **Zheng Yang**, Lu Xiaoyun. Longitudinal collision mitigation via coordinated braking of multiple vehicles using model predictive control. *Integrated Computer-Aided Engineering*. 2015, 22(2), pp. 171-185. (SCI 源刊)
- [8] Lu Xiaoyun, Wang Jianqiang, Li Eben Shengbo, **Zheng Yang**. Multiple-Vehicle Longitudinal Collision Mitigation by Coordinated Brake Control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014. (SCI 源刊)

参与的科研项目

- [1] 国家 863 项目“基于车联网的车辆智能技术化研究”，项目编号：2012AA111901，起止时间：2012 年 3 月至 2014 年 12 月
- [2] 国家 863 项目“多目标交通信号和行驶车辆智能化协同控制技术”，项目编号：2014AA110302，起止时间：2014 年 1 月至 2016 年 12 月
- [3] 清华-株式会社本田技术研究所合作研究“普通道路行车驾驶行动数据收集和分析”，项目编号：20133000033，起止时间：2012 年 11 月至 2013 年 8 月
- [4] 清华-株式会社本田技术研究所合作研究“ADAS 装置在中国的适用性研究”，项目编号：20143000193，起止时间：2014 年 7 月至 2015 年 3 月

申请的专利

- [1] 王建强, **郑洋**, 李克强, 秦晓辉, 王云鹏, 徐成. 一种基于车路/车车通讯的车辆弯道通行辅助系统. 中国发明专利, 申请号: 201410169875.4.